Übungen zu Analysis für Physik I

WS 2012/2013

Prof. H. Muthsam

1) Geben Sie geometrische Deutungen für folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$):
   a) $\{(x,z) : x^2 = z\}$
   b) $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = z\}$
   c) $\{(u,v) : u + v = 0\}$
   d) $\{(u,v) : u + v > 0\}$
   e) $\{(u,v,w) : u + v > 0\}$

2) Deuten Sie folgende cartesischen Produkte $A \times B$ bzw $A \times B \times C$ geometrisch:
   a) $A = [0,1]$, $B = \mathbb{R}$
   b) $A = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $B = [-1,1]$
   c) $A = B = C = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ (versuchen Sie es zuerst mit 2 Faktoren)

3) Gegeben seien die Mengen $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{b,d,f,h\}$, $C = \{a,c,e,g\}$ und $D = \{a,b,g,h\}$. Berechnen Sie
   a) $(A \setminus B) \cup C$
   b) $(A \cap B) \setminus (A \cap D)$
   c) $(A \cup C) \setminus B$
   d) $A \cup (B \setminus C)$
   e) $(A \times B) \setminus (B \times D)$
   f) $(A \times C) \cup (B \cap D)$

4) Ist stets $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

5) Ebenso: $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$?

6) Lässt sich $(R \cup S) \times (T \cup U)$ durch $R \times T$, $R \times U$, $S \times T$, $S \times U$ ausdrücken?

7) Ebenso für $(R \cap S) \times (T \cap U)$.

8) Zeigen Sie: $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

9) Welche Mengen werden durch folgende Angaben dargestellt?
   a) $A = \{x : 3x + 5 = 0\}$
   b) $B = \{x : 3x + 5 \leq 0\}$

c) $C = \{x : 3x + 5 \leq 0,\ 0 \leq -2x + 9\}$

d) $D = \{x : 2x - 7 \leq 0 \leq 2x + 8\}$

10) Ebenso

a) $\{x : x^2 < 9\}$

b) $\{x : (x + 1)^2 > 9\}$

c) $\{x : x^3 < 27\}$

11) Für gegebenes $a, b, c, d, y \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Gleichung

$$\frac{ax + b}{cx + d} = y$$

a) Rechnen Sie die Lösungsmenge formal aus.

b) Überprüfen Sie, dass das wirklich eine Lösung ist.

c) Unter welchen Bedingungen an a, b, c, d, y existiert eine eindeutige Lösung?

12) Bilden Sie die Verneinung folgender Aussagen:

a) Jeder Baum ist mindestens 1.85m groß (bitte nicht nur: Nicht jeder...).

b) Jede grüne Frucht ist entweder eine unreife Kirsche oder eine Stachelbeere.

c) Für jeden Menschen gibt es ein Elternpaar.

d) Jedes Lebewesen besteht ausschließlich aus Zellen, die alle auf eine Zelle zurückgehen.

13) Trifft es zu, daß jeweils entweder eine Aussage oder ihre Verneinung richtig ist? Arbeiten Sie mit geeigneten Beispielen.

14) Zeigen Sie: für $J = [a, b]$ bzw. $J = (a, b)$ gilt: $\inf J = a$.

15) Zeigen Sie: $\sup\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 2$,
$\inf\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 1$.
Liegt ein Maximum bzw. Minimum vor?

16) Bestimmen Sie sup bzw. inf von $\{(-1)^n/n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Welche Wirkung hat der Faktor $(-1)^n$? Weiters $\sup\left\{\frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R}\right\},\ \sup\left\{\frac{x}{1+x} : x > \frac{1}{4}\right\}$.
Wann liegt ein Maximum vor?

17) Betrachten Sie alle möglichen Vorzeichen von $a+b$ und diskutieren Sie (analytisch) genau, wann in der Dreiecksungleichung Gleichheit bzw. Ungleichheit auftritt. Deuten Sie das Ergebnis auch geometrisch!

18) Zeigen Sie induktiv:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

19) Fibonaccizahlen. Leonardo von Pisa (1170?–1250?), genannt Fibonacci, untersuchte folgendes Modell der Kaninchenvermehrung (ohne Freßfeinde und dergleichen). Jedes neugeborene Kaninchenpaar möge nach einem und dann nach dem zweiten Monat ein Kaninchenpaar zur Welt bringen, anschließend aber die Fortpflanzung einstellen. Im 1. Monat und 2. Monat des Beobachtungszeitraumes sei jeweils ein neugeborenes Paar vorhanden. a_k bezeichne die Anzahl der im Monat $k(= 1, 2, \dots)$ vorhandenen, neugeborenen Paare. Es ist also $a_1 = 1,\ a_2 = 1$.
Begründen Sie aus obigen Ausführungen die Beziehung

$$a_k = a_{k-2} + a_{k-1} \qquad (k = 3, 4, \dots)$$

und berechnen Sie die ersten zehn dieser Zahlen aus dieser rekursiven Beziehung. Beweisen Sie weiterhin durch Induktion nach k:

$$a_k = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right\} \Big/ \sqrt{5} \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Bezeichnen Sie

$$b_k = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \right\} \Big/ \sqrt{5},$$

welche Größen natürlich einfacher zu berechnen sind als die a_k. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner einige a_k bzw. b_k und vergleichen Sie diese. Weshalb sind (für nicht zu kleine k) die b_k eine gute Approximation für die a_k? Sehen Sie etwa noch, wie man (für nicht zu kleine k) nur b_k zu berechnen braucht, um sofort a_k zu erhalten?

20) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n : durch n Geraden (in allgemeiner Lage) wird die Ebene in $(n^2 + n + 2)/2$ Teile zerlegt.
(Anleitung: jede weitere Gerade zerlegt eine ganz bestimmte Anzahl der schon vorhandenen Gebiete in zwei Teile.)

21) Ebenfalls durch Induktion: ist $n \geq 2$ und $0 < x_k < 1\ \forall k = 1, \dots, n$, so ist $(1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n) > 1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$.

22) Zeigen Sie, daß für die folgende Aussageform der Schluß von n auf $n + 1$ gelingt, obwohl sich keine Zahl $n \in \mathbb{N}$ angeben läßt, die die Aussageform in eine wahre Aussage überführt:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

23) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:
   a) $2n^2 > (n + 1)^2$, gültig für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$;
   b) $2^n > n^2$, gültig für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$.

24) Zeigen Sie durch direkte Rechnung die Beziehung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

25) Welcher Koeffizient steht bei der Auswertung von $(1+x)^{823}$ vor x^{818} ?

26) Verifizieren Sie an Hand des Pascalschen Dreiecks:

$$\binom{6}{3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}.$$

Können Sie diese Beziehung verallgemeinern?

27*) Man stelle die Anzahl folgender Möglichkeiten durch Binomialkoeffizienten dar:

a) n nicht unterscheidbare Teilchen auf k Zellen zu verteilen (mehrere Teilchen pro Zelle erlaubt)
(Anleitung: stellen Sie Teilchen mit $*$ und Zellwände mit / dar und suchen Sie also nach allen möglichen Anordnungen $/ * * // * / \ldots$)

b) n nicht unterscheidbare Teilchen auf k Zellen so zu verteilen, daß jede Zelle höchstens ein Teilchen enthält ($k \geq n$)

c) Läßt sich aus a) und b) folgende Behauptung begründen?
In mehr als 60% der Fälle sind von vier Geschwistern mindestens zwei im gleichen Monat geboren. In der Vorlesung wird gerne erklärt, weshalb diese Betrachtungen für die Physik fundamental wichtig sind.

28) Nach welchem Beweisprinzip wird man die Aussage

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq b)$$

beweisen? Führen Sie dies durch und untersuchen Sie noch, was sich im Fall $a = b$ ergibt.

29) Wie sieht der natürliche Definitionsbereich von

$$g(x) = (x+8)/(x^3 - x)$$

aus?

30) Berechnen Sie jeweils $g \circ f$ bzw. $f \circ g$:

a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $\qquad g(x) = \sin x$

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ $\qquad g(x) = \frac{1}{1-4x}$

31) a) Zeigen Sie, daß $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (die Zusammensetzung sei jeweils erklärt).

b) Ist allgemein

$$(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g$$

bzw.

$$f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2$$

richtig (bei jeweils sinnvoller Zusammensetzung)?

32) Berechnen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas $P(3)$, wobei

$$P(x) = x^4 + 5x^3 - 7x + 2.$$

33) Zeigen Sie: $\forall k \geq 2, x, \xi \in \mathbb{R}$ ist
$$x^k - \xi^k = (x - \xi)(x^{k-1} + \xi x^{k-2} + \cdots + \xi^{k-2}x + \xi^{k-1}).$$

34) Bestimmen Sie die Zerlegung in Linearfaktoren für
a) $P(x) = x^2 - 2$ b) $P(x) = x^2 + 1$ c) $P(x) = x^4 - x^2$

35) Geben Sie genau an, wie das Horner-Schema für die Newtonsche Interpolationsdarstellung lautet und schreiben Sie einen entsprechenden kleinen Programmausschnitt.

36) Berechnen Sie mit der Newtonschen Interpolationsformel $P(0.58)$, wobei P aus der Lösung folgender Interpolationsprobleme stammt: Interpolieren Sie die Funktion sin mit den Knoten
$$(x_0, x_1) = (0, 1);\ (x_0, x_1, x_2) = (0, 0.5, 1);\ (x_0, x_1, x_2, x_3) = (0, 1/3, 2/3, 1)$$
und werten Sie das Interpolationspolynom dann an der Stelle 0.58 aus: Betrachten Sie den Interpolationsfehler, d.h. die Abweichung $P(0.58) - \sin(0.58)$ für die verschiedenen Wahlmöglichkeiten bei den Stützstellen

37) Bestimmen Sie die „natürlichen“ Definitionsbereiche folgender Funktionen:
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2} \qquad g(x) = \sqrt{x^4 + 1}$$
$$h(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - x}}{8 - \sqrt{4x^2 - 1}} \qquad k(x) = \frac{x^4 - 27x^3 + x}{x^5 - 9x^3}$$
$$l(x) = \frac{x^6 - 9x^4}{x^7 - x}$$

38) Stellen Sie $p(x)/q(x)$ gemäß dem Euklidischen Algorithmus dar, wobei
$$p(x) = x^5 - 1, \qquad q(x) = x - 1 \qquad \text{bzw.}$$
$$p(x) = x^5 - 1, \qquad q(x) = x + 1$$

39) Für eine Zahl z ist ja $\sqrt{z}$ so beschaffen, daß $\sqrt{z}\sqrt{z} = z$. x sei nun eine Zahl zwischen 0 und 1; y eine Zahl, die größer als 1 ist. Können Sie, von der eingangs genannten Eigenschaft über Wurzeln ausgehend, erläutern, weshalb $\sqrt{x} > x$, aber $\sqrt{y} < y$?

40) Betrachten wir folgende Zahlen: $x_1 = 10^{-2}$, $x_2 = 10^{-4}$, ... Es sei $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^2$. Bilden wir nun $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... bzw. $g(x_1)$, $g(x_2)$.... Für welche der beiden Funktionen f bzw. g wirkt sich eine Änderung des Arguments $(x_1, x_2, \ldots)$ stärker aus? Läßt sich das am Graphen (Schaubild) der Funktionen erkennen? Wie läßt es sich noch sinnvoll klarmachen?

41) Bestimmen Sie die ersten Ableitungen von
a) $f(x) = c$ (c eine beliebige Konstante)
b) $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$
c) $f(x) = x^3$ (beachten Sie dabei, daß für kleine Werte von h: $|h^2| \leq |h|$ ist).

d) $f(x) = x^n$ ($n \geq 1$, ganz) (Entwickeln Sie $(x+h)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz!)

42) Es sei $f(x) = [\frac{1}{x}]$. Dabei steht [ ] für die nächstkleinere ganze Zahl. $[y]$ ist also jene Zahl η, die ganz ist, und so, daß $\eta \leq [y]$, für jede ganze Zahl ζ mit $\eta < \zeta$ aber $[y] < \zeta$. (Was ist also $[3.14159]$, $[-7.26]$?) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ im Bereich $x > 0$. Wo ist f differenzierbar und wie lauten dort die Werte der Ableitung?

43) Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar? Berechnen Sie den Wert ihrer Ableitung. (<u>Anl.:</u> es genügt, von sin zu wissen, daß für alle w: $-1 \leq \sin w \leq 1$ ist.)

44) a) Zeigen Sie: Die Gleichung der Normalen in $(x_0, f(x_0))$ an den Graphen von f lautet:

$$y = f(x_0) - \frac{x - x_0}{f'(x_0)} \qquad (f'(x_0) \neq 0).$$

b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck, das die Normale im Punkt $(1, f(1))$ mit den beiden Koordinatenachsen bildet?

45) Gedanken zum Boyle-Mariotteschen Gesetz. Der Druck p einer bestimmten abgeschlossenen Gasmenge ist bei konstant gehaltener Temperatur T eine Funktion f des Gasvolumens V. Wir drücken dies durch die Gleichung $p = f(V)$ aus. Aufgrund des Boyle-Mariotteschen Gesetzes ergibt sich

$$f(V) = \frac{C}{V},$$

wobei C eine durch die Gasmenge bestimmte konstante Größe ist. Wir betrachten hier jedoch nur die Maßzahl von C und können daher $C \in \mathbb{R}$ schreiben. Da das Gesetz nur für ideale Gase gilt, müssen wir genügend große Werte von V voraussetzen, wobei V_0 das bei einem bestimmten Anfangsdruck p_0 sich ergebende Gasvolumen bezeichnet (gemeint sind auch hier jeweils nur die Maßzahlen).

a) Man setze $y := p$ und $x := V$ und bestimme die Gleichung der Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$.

b) Wie läßt sich die Ableitung von f mit den physikalischen Bezeichnungen p und V als Grenzwert schreiben und physikalisch deuten? Was bedeutet insbesondere das Minuszeichen im Ableitungsterm?

46) Beweisen Sie, daß

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \Big(\lim_{x \to x_0} f(x)\Big)\Big(\lim_{x \to x_0} g(x)\Big)$$

(wie sind die Aussagen genau zu formulieren?)

47) Zeigen Sie direkt aus der Definition der Stetigkeit, daß $x \to x^3$ in allen $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

48) Ebenso für $f(x) = 1/x$ in allen $x \neq 0$.

49) Zeigen Sie direkt, daß $x \to |x^3|$ überall stetig ist!

50) Berechnen Sie die 1., 2. und 3. Ableitung von

a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = (x^2 + 2)^9$

51) f und g seien k-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie durch Induktion nach $k \geq 1$ die Leibnizsche Formel

$$(fg)^{(k)} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} f^{(l)} g^{(k-l)}.$$

Dabei ist die 0-te Ableitung einer Funktion als diese selbst anzusehen.

52) Wir werden später zeigen: $\cos' x = -\sin x$, $\sin' x = \cos x$.
Verwenden Sie dies, um die Funktionen

$$x^4 \cdot \sin x, \ (\sin x) / (\cos x),$$

zu differenzieren.

53) Differenzieren Sie

$$f(x) = \frac{(x+1)^9}{(x-1)^7}, \quad g(x) = \frac{x^2 + 5}{8x - 3}, \quad h(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

54) Für welche x sind folgende Funktionen differenzierbar?
$f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ (man veranschauliche sich den Graphen)
$g(x) = |(x^2 - 1)|$
$h(x) = |x^3|$

55) Das n-te Legendre-Polynom P_n ist durch

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right] \qquad (n \geq 1)$$
$$P_0(x) := 1$$

definiert.

a) Berechnen Sie $P_0, \ldots, P_3$ explizit.

b) Bestimmen Sie allgemein die Koeffizienten von P_n.

c) Zeigen Sie: $P_n(x)$ genügt der Legendreschen Differentialgleichung

$$[(x^2-1)P_n']' = n(n+1)P_n.$$

Zum Beweis wende man Übung 51 auf

$$[(n+1)2x(x^2-1)^n]^{(n+1)} \qquad \text{und} \qquad [(x^2-1)(x^2-1)^n]^{(n+2)}$$

an und bestätige

$$P_{n+1}' = xP_n' + (n+1)P_n, \; P_{n+1}' = \frac{x^2-1}{2(n+1)}P_n'' + \frac{(n+2)x}{n+1}P_n' + \frac{n+2}{2}P_n.$$

56) Logarithmische Ableitung. Es sei stets $f_1 \cdots f_n \neq 0$, die f_i differenzierbar. Stellen Sie

$$\frac{(f_1 \cdots f_n)'}{f_1 \cdots f_n}$$

durch $\frac{f_1'}{f_1}, \ldots, \frac{f_n'}{f_n}$ dar. (Beginnen Sie eventuell mit wenigen Faktoren).

57) Beweisen Sie die Quotientenregel!

58) Zeigen Sie: existiert eine Funktion $\rho(h)$ mit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{h} = 0$ sowie ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodaß $f(x_0+h) = f(x_0) + h\alpha + \rho(h)$, so ist f in x_0 differenzierbar und $\alpha = f'(x_0)$.

59) Formulieren und beweisen Sie die Kettenregel für mehrere Faktoren!
(Welches Beweisprinzip wird hier zweckmäßig sein?)

60) Differenzieren Sie:

$$\sin(x^3), \quad (\sin x)^3, \quad \sin(1+x), \quad \frac{1}{1+\cos x}$$

(vergleiche Beispiel 52).

61) Ebenso

$$\sin\left(\frac{1}{1-x^2}\right), \quad \frac{1}{1+\cos^3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}, \quad \cos(\sin x).$$

62) Ebenso

$$\sqrt{x\sqrt{x}}, \quad \sqrt{\sin x \cos x}, \quad \cos^2(x^3).$$

Dabei verwende man: $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$.

63) Zeigen Sie: unter allen Rechtecken vorgegebenen Umfangs besitzt das Quadrat die größte Fläche.

64) Welches Rechteck besitzt — bei vorgegebener Fläche — den kleinsten Umfang?

65) Einem Kreis ist ein gleichschenkeliges Dreieck mit größtem Flächeninhalt einzuschreiben!

66) Für eine Größe x mögen n Messungen die Werte a_1, a_2,…,a_n ergeben (die in Folge von Meßfehlern nicht übereinstimmen werden). In der Fehlertheorie zeigt man, daß vielfach jene Größe ξ, die der Funktion $f(u) = (u - a_1)^2 + \cdots + (u - a_n)^2$ den kleinsten Wert erteilt, ein optimaler Schätzwert für x ist. Können Sie dem Charakter von f entnehmen, weshalb diese Wahl von f zumindest nicht unvernünftig ist? (sogenannnte Methode der kleinsten Quadrate nach Gauß, 1777–1855).

67) Warum wäre beim vorhergehenden Beispiel

$$f(x) = (x - a_1) + \cdots + (x - a_n)$$

keine vernünftige Wahl?
Können Sie weiters dieses Beispiel mit

$$f(x) = |x - a_1| + \cdots + |x - a_n|$$

lösen und wenn nein, warum im allgemeinen nicht?
(Betrachten Sie vielleicht zunächst den Fall von 2 Meßwerten.)

68) Aus einem Kreis ist ein Sektor (bestimmt durch den noch zu ermittelnden Öffnungswinkel α) derart auszuschneiden, daß der aus dem restlichen Teil geformte Kreiskegel maximales Volumen erreicht!

69) Diskutieren Sie, in welchen Intervallen die folgenden Funktionen jeweils monoton wachsend bzw. fallend sind:

a) $x \to x^2$ b) $x \to (x - 1)(x + 1)$
c) $x \to 1/x$ d) $x \to \frac{1}{x^2-1}$

70) Ebenso:
a) $x \to \frac{x-1}{x+1}$ b) $x \to \frac{x}{x^2+1}$

71) f sei in $I = (a, b)$ differenzierbar. Zeigen Sie, daß gilt:
a) $f' \geq 0$ in $I \;\Rightarrow\; f$ ist in I monoton wachsend.
b) $f' = 0$ in $I \;\Rightarrow\; f$ ist in I konstant.

72) Beweisen Sie den Extremwerttest für das Minimum:
Sei $f \in \mathcal{C}^2$ auf $I = (a, b)$, $x_0 \in I$ erfülle $f'(x_0) = 0$. Zeigen Sie, daß x_0 Stelle eines Minimums ist, wenn $f''(x_0) > 0$.

73) Zeigen Sie unter Anwendung des Extremwerttests, daß sich in Beispiel 63–65 tatsächlich der jeweils genannte Extremaltyp (Maximum, Minimum) ergibt!

74) Sei $f \in \mathcal{C}^3(J)$, x_0 innerer Punkt von J. Es gelte $f''(x_0) = 0$. Wie ermittelt man (unter Betrachtung von $f'''(x_0)$), ob ein Wendepunkt vorliegt (d.h. f'' unmittelbar links bzw. rechts von x_0 unterschiedliches Vorzeichen aufweist)? (Erinnern Sie sich an einen Fall, wo es auf unterschiedliches Vorzeichen von f' links und rechts von einer Stelle x_0 ankam.)

75) Bestimmen Sie folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int (x^7 - 8x + 1)dx$

b) $\int (3x^5 - 9x^2 + 2)dx$

c) $\int \big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k\big)dx \qquad (a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$

76) a) $\int \sin(4x^7 - 2x) \cdot (28x^6 - 2)dx$

b) $\int (x^8 - 9x^4 + 1)^5 (8x^7 - 36x^3)dx$

c) $\int \alpha e^{\alpha x} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ (Anleitung: verwende $\int e^n dn = e^n + c$)

d) $\int e^{\alpha x} dx$ (Anleitung: auf c) zurückführen!)

77) a) $\int x \cdot \cos x \; dx$

b) $\int x^2 \cdot \sin x \; dx$ (passende Regel 2-fach anwenden!)

c) $\int x e^x dx$

d) $\int x^2 e^x dx$

78) Zeigen Sie, daß für ein Polynom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

die Beziehung

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

gilt. (Man differenziere das Polynom k-fach.)

79) Leiten Sie unter Benutzung der Ableitungen des Sinus bzw. der Funktion e^x die entsprechenden Taylorpolynome (mit Restglied) um den Punkt $x = 0$ her!

80) Leiten Sie das Taylorpolynom (um $x_0 = 0$) mit Restglied für $f(x) = \frac{1}{1-x}$ her. Untersuchen Sie das Verhalten von $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x), \ldots$ für $x = \pm 1/2$ und $x = \pm 1$. Bemerken Sie Unterschiede?

81) Die Funktion $\cos x$ soll um $x_0 = 0$ durch ihr Taylorpolynom 2. Grades dargestellt werden,

$$T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}.$$

In welchem Intervall $[-h, h]$ kann man eine Genauigkeit der Darstellung von $\varepsilon = 10^{-4}$, 10^{-8}, 10^{-12} garantieren?
Ähnlich mit dem Taylorpolynom 4. Grades.

82) Beachten Sie, daß für entsprechend differenzierbares f

a) $f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \qquad \xi \in [x_0 - h, x_0]$ passend, bzw.

b) $f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(\eta) \quad$ (η passend) ist. Verwenden Sie sowohl a) als auch b) (und die jeweils zulässigen Ausdrücke für $f(x_0+h)$), um sowohl den einseitigen Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

als auch den zentrierten Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

darzustellen. Deuten Sie beide Differenzenquotienten geometrisch! Die Ableitung der Funktion $f(x)=\cos x$ soll nunmehr durch einseitigen bzw. zentrierten Differenzenquotienten angenähert werden. Welche Schrittweise h garantiert hierbei eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-4}$, 10^{-8} bzw. 10^{-12}. Welcher Differenzenquotient ist also als genauere Darstellung der Ableitung anzusehen?

83) Leiten Sie den Ausdruck für den Fehler bei der Trapezregel her!

84) Welche Schrittweite h reicht aus, um $\int_0^1 x^3 dx$ mit Hilfe der zusammengesetzten Mittelpunktsregel mit einem Fehler $\varepsilon = 10^{-3}$ bzw. 10^{-6} zu berechnen? Wieviele Funktionsauswertungen sind also erforderlich? Die sogenannten Gaußsche Quadraturformel für 3 Stützpunkte (allgemein für $\int_a^b f(x)dx$) lautet

$$G_{3,a,b}(f) = \frac{b-a}{18}\left(5f\left(c-h\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+8f(c)+5f\left(c+h\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right).$$

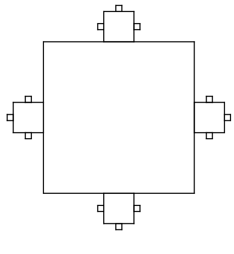
Dabei wurde $c=\frac{a+b}{2}$, $h=\frac{b-a}{2}$ gesetzt. Verwenden Sie dies für obiges Integral. Wie groß ist der Fehler?

85) Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen. Zeigen Sie, daß dann die folgenden Folgen konvergent sind und die folgenden Aussagen für die Grenzwerte gelten:

a) $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n+\beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$;

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)/(\lim_{n\to\infty} b_n)$, falls $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

86) Aus dem Quadrat der Seitenlänge 1 wächst aus dem mittleren Fünftel jeder Seitenstrecke wieder ein Quadrat nach außen usw. (siehe Skizze). Diskutieren Sie Fläche und Umfang der entstehenden Figur!



87) Bestimmen Sie folgende Limiten:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-3}{5n+7},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4}{9n^3+8},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+4}{9n^3+7},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+6}{7n^2-3}$$

88) Zeigen Sie, daß jede monoton fallende, beschränkte Zahlenfolge gegen ihr Infimum konvergiert.

89) Ermitteln Sie das Bildungsgesetz nachstehender Folgen und gegebenenfalls den Limes; welche der Folgen sind monoton bzw. beschränkt?

a) $-4, -1, 2, 5, \ldots$

b) $-3, -2, -1, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{9}, \frac{5}{16}, \frac{7}{25}, \frac{9}{36}, \ldots$

c) $0, -1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{4}, -3, \frac{1}{8}, -4, \frac{1}{16}, \ldots$

90) Die Folge (a_n) genüge der Rekursion

$$a_{n+1} = \frac{3}{4 - a_n}; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

also

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

mit $f(x) = 3/(4 - x)$.

a) Berechnen Sie die Fixpunkte von f, d.h. die beiden Lösungen der Gleichung $x = f(x)$, und bestimmen Sie für die beiden so erhaltenen Werte α_1, α_2:

$$\lambda^{(k)}(a_n) := \frac{a_{n+1} - \alpha_k}{a_n - \alpha_k} = \frac{f(a_n) - f(\alpha_k)}{a_n - \alpha_k} \qquad (k = 1, 2)$$

sowie

$$\lambda^{(k)} := \lim_{x \to \alpha_k} \lambda^{(k)}(x) \qquad (k = 1, 2).$$

Zeigen Sie, daß — bei geeigneter Numerierung der α — $|\lambda^{(1)}| < 1$, $|\lambda^{(2)}| > 1$ ist. Folgern Sie weiter daraus, daß es ein q, $0 < q < 1$, gibt und ein Intervall U_1 um α_1, sodaß gilt: $a_0 \in U_1 \Rightarrow a_1 \in U_1 \Rightarrow a_2 \in U_1$ etc. und $a_n \to \alpha_1$ $(n \to \infty)$. Daher heißt α_1 anziehender Fixpunkt.

Was geschieht, wenn man mit a_0 in einem (eventuell kleinen) Intervall um α_2 (aber nicht in α_2 selbst) startet (zuerst Experiment mit Taschenrechner, dann Versuch der Erklärung)? Weshalb nennt man also α_2 abstoßender Fixpunkt? (Anleitung: für Ausdrücke $f(u) - f(v)$ ist oft der Mittelwertsatz der Differentialrechnung gut.)

b) Zeigen Sie weiterhin, daß für den anziehenden Fixpunkt α_1 gilt: $a_0 < 3$, $a_0 \neq 1 \Rightarrow 0 < \lambda^{(1)}(a_n) < 1 \Rightarrow (a_n)$ ist monoton und beschränkt $\Rightarrow a_n \to \alpha_1$ $(n \to \infty)$.

91) Versuchen Sie ähnlich die Rekursion

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$$

zu diskutieren.

92) Verhulstsches Modell der Vermehrung einer Population mit beschränktem Lebensraum. x_n bezeichne die (auf die größtmögliche Population bezogene) relative Anzahl von Individuen der n-ten Generation einer Art. Es gelte die Rekursion

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \tag{*}$$

Dabei ist r ($0 \le r \le 4$) eine für die Vermehrungsfähigkeit der Art charakteristische Konstante. In (*) steckt die Annahme, daß die Zahl der Tiere der $(n+1)$-ten Generation proportional zur Zahl der Tiere in der n-ten Generation ist. Der Faktor $(1 - x_n)$ spiegelt wider, daß sich bei großer Bevölkerungszahl (nahe 1) die Bedingungen verschlechtern und sich somit die Fortpflanzung verringert.

a) Zeigen Sie: $0 \le x_0 \le 1 \Rightarrow 0 \le x_n \le r/4 \quad n = 1, 2, \ldots$

b) Bestimmen Sie die beiden Fixpunkte der Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$ und zeigen Sie, daß für $0 \le r < 3$ stets ein Fixpunkt anziehend ist. Für $0 < x_0 < 1$ zeige man ähnlich wie bei den vorhergehenden Aufgaben:

i) $0 < r \le 1 \Rightarrow$ die Population stirbt monoton aus

ii) $1 < r \le 2 \Rightarrow x_n$ strebt monoton gegen einen positiven Gleichgewichtswert

iii) $2 < r \le 2\sqrt{2} \Rightarrow$ ebenso, aber oszillierend

c) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner unter Verwendung des Anfangwertes $x_0 = 0.1$ die Glieder $x_1, \ldots, x_{20}$ für folgende r-Werte und überprüfen Sie an diesem Material folgende Aussagen:

i) $r = 3.2$: die Bevölkerungszahl pendelt zyklisch zwischen 2 positiven Werten (dies gilt generell für $3 < r < 1 + \sqrt{6} = 3.4495\ldots$)

ii) $r = 4$: die Folge verhält sich chaotisch, d.h. es ist keine Regelmäßigkeit ersichtlich (generell der Fall für $3.57 < r \le 4$).

93) Bestimmen Sie, welche der folgenden Reihen divergent, konvergent bzw. absolut konvergent sind:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + k}{3^k}$, d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^k} k!$, e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-k}{1+k}$.

94) Konvergieren folgende Reihen (Vergleichskriterium):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2n^3 - 1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)\sqrt{n+3}}$

95) Ebenso (Quotientenkriterium):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{2n}}{(2n-1)!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{4^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}$

96) Wenden Sie geeignete Konvergenzkriterien an, um zu ermitteln:

a) $\left\{x : \sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k \text{ konvergiert}\right\}$

b) $\{x : \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k \text{ konvergiert}\}$

c) $\{x : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{3k+7} \text{ konvergiert}\}$

97) Definieren Sie (unter Beachtung geeigneter Definitionsbereiche) die Umkehrfunktionen zu $x \to x^k$ ($k \geq 1$, ganz). Worin besteht der Unterschied zwischen geraden und ungeraden k?

98) Geben Sie (natürliche) Definitionsbereiche an, für die sich die nachfolgenden Funktionen invertieren lassen. Geben Sie jeweils f^{-1} an.
(Achtung: f^{-1} kann für „dasselbe" f bei geändertem Definitionsbereich andere formelmäßige Gestalt haben!)

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
c) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ d) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

99) Beim vorhergehenden Beispiel sollten die Umkehrfunktionen sozusagen direkt ermittelt werden. Lösen Sie jetzt dieselben Aufgaben, indem Sie zunächst die Funktionen als Zusammensetzung einfacherer Funktionen darstellen!

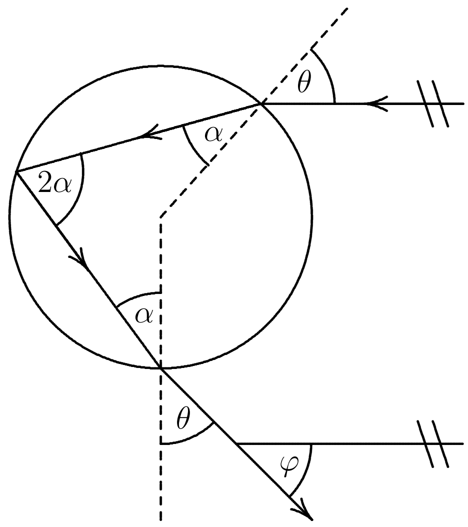
100) Arbeiten Sie ähnlich, wie das bei arcsin geschehen ist, die Eigenschaften von arccos in Detail heraus! Haben Sie eine einfache (geometrische) Erklärung dafür, daß — vom Vorzeichen abgesehen — die Ableitungen von arcsin und arccos übereinstimmen?

101) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x) = \sin x + 4\cos^2 x$ um den Punkt $x_0 = 0$ lokal invertierbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die erste und zweite Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $y_0 = f(x_0)$.

102) Mit dem Brechungsgesetz von Snellius $\sin\theta / \sin\alpha = R$ ergibt sich für den Streuwinkel φ eines Lichtstrahls in einem Wassertröpfchen von kreisförmigem Querschnitt

$$\varphi = f(\theta) = 2\theta - 4 \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{R}\right)$$

(siehe Skizze). Überprüfen Sie dies! Diskutieren Sie $f(\theta)$ und $f'(\theta)$ für $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Bestimmen Sie — durch Ausprobieren — näherungsweise einen Wert θ_0 mit $f'(\theta_0) = 0$! (R besitze dabei den Wert für rotes Licht, $R = 1.331$.) θ_0 bestimmt den Wert stärkster Streuintensität (können Sie sich erklären, weshalb?) und bei einem Regenbogen die Höhe über dem Erdboden.



103) Bezeichnen Sie die Stammfunktion von $\frac{1}{1+x}$ mit $\log(1+x)$ ($|x|<1$). Geben Sie die Potenzreihenentwicklung für $\log(1+x)$ an (Integrationskonstante so wählen, daß $\log 1 = 0$ ist). Verwenden Sie dies und die für $|x|<1$ gültige Darstellung

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \ldots,$$

um zu zeigen:

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 + - \ldots$$

104) Leiten Sie die Beziehung

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

her.

105) Zeigen Sie:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \ (a>0)$$
$$\int \sinh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{1}{2}x$$
$$\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{1}{2}x$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{Arsinh}\frac{x}{a} \ (a>0)$$

106) Ein Beispiel für die Partialbruchzerlegung.
Es sei $r(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$. Wie können wir $\int r(x)\,dx$ schon jetzt bilden? In Fällen, wo dieses Integral aber nicht direkt angebbar ist, führt die sog. Methode der Partialbruchzerlegung weiter, die wir an diesem einfachen Beispiel erläutern. Man setzt $r(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ und bestimmt A und B geschickt (z.B. Einsetzen von speziellen Werten für x, sodaß ein Gleichungssystem für A und B resultiert und diese Größen

daraus bestimmt werden können). Dann integriert man $\int \frac{A}{x-1}\,dx$, $\int \frac{B}{x+1}\,dx$. Führen Sie all dies durch!

107) Ein weiteres Beispiel zur Partialbruchzerlegung. $r(x) = \frac{1}{x^3+x^2+x} = \frac{1}{x(x^2+x+1)}$.
x und x^2+x+1 haben keine gemeinsamen Nullstellen, und x^2+x+1 läßt sich im Reellen nicht in Linearfaktoren zerlegen (weshalb?).
Ansatz: $r(x) = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{x^2+x+1}$.
Bestimmen Sie A, B, C, sodaß r in dieser Form dargestellt wird!

108) Leiten Sie aus den Potenzreihenentwicklungen von $\sin x$ bzw. $\cos x$ her, daß für kleines x:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}\,x^5 + \ldots$$

(man benütze $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$)!
Ebenso

$$\tan x/\cos x = x + \frac{5}{6}\,x^3 + \frac{61}{120}\,x^5 + \ldots.$$

109) In verschiedenen Bereichen der Physik spielt der Integralsinus Si bzw. die Besselfunktion J_0 eine Rolle,

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\vartheta)d\vartheta.$$

Geben Sie Taylorreihe samt Konvergenzradius für beide Funktionen an.
(Bem.: weshalb ist es naheliegend, zu vermuten, daß $\frac{d}{dx}\int_0^\pi \cos(x\sin\vartheta)d\vartheta =$ $= \int_0^\pi [\frac{d}{dx}(\cos(x\sin\vartheta))]d\vartheta$ ist? Weshalb ist dies aber dennoch keineswegs selbstverständlich? Verwenden Sie aber diese Vorgangsweise, die später genauer besprochen wird!)

110) Bestätigen Sie, daß $y(x) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(k+1)!2^{2k+1}}$ eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung $L_n(y) = 0$ mit $n = 1$ ist, wobei

$$L_n(y) = x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y.$$

Gewinnen Sie diese Lösung auch mit Hilfe unbestimmter Koeffizienten!

111) Überprüfen Sie, daß J_0 der sog. Besselschen Differentialgleichung genügt, daß also $L_0(J_0) = 0$ ist.

112) Man kann zeigen, daß für die Oberfläche eines Drehellipsoides mit Halbachsen a und $b = \sqrt{1+\varepsilon^2}$ gilt:

$$\mathcal{O}(\varepsilon) = 2a^2\pi\left(1 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\right)\arctan\varepsilon\right).$$

Geben Sie eine bequeme Formel an, die es gestattet, für kleine Werte von $\varepsilon : \mathcal{O}(\varepsilon)$ recht genau zu berechnen.

113) Für die Schwingungsdauer eines math. Pendels gilt:

$$T(\alpha) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}}.$$

Dabei ist α der maximale Auslenkungswinkel, l die Länge, g die Schwerebeschleunigung. Entwickeln Sie den Integranden in eine Potenzreihe in $\cos\varphi$, d.h. in eine Reihe der Gestalt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos^k \varphi$. Bestimmen Sie die Koeffizienten α_k. Integrieren Sie diese Reihe gliedweise. Geben Sie für das Resultat eine Reihenapproximation in α!
(Anleitung für $\int \cos^k \varphi \, d\varphi : \int \cos^k \varphi \, d\varphi = \int \cos^{k-1} \varphi \cos\varphi d\varphi$, weiter mit Produktregel, das entstehende $\sin^2 \varphi$ wieder durch $\cos^2 \varphi$ ausdrücken und alles mit $\cos^k \varphi$ auf eine Seite bringen!)

114) Es sei $s(x) := 1/\sin x$. Geben Sie (auf einem geeigneten Definitionsbereich!) die Umkehrfunktion zu s an und differenzieren Sie dieselbe!