Übungen zu Analysis für Physik II

SS 2013

Prof. H. Muthsam

115) Werten Sie folgende unbestimmte Formen aus:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\log(1+x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\tan(2x)}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1-\cos x)}$

116) Ebenso: Hier und weiter unten überlege man auch, womit man einfacher arbeitet: mit Reihendarstellung (falls leicht erhältlich) oder mit de l'Hospital.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} x^\alpha \cdot \log x \ (\alpha > 0)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

Falls nicht von vornherein eine Form 0/0 oder dgl. vorliegt, versuche man, sie durch Umformung zu erreichen!

117) Ebenso:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \sin x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x[\log(1+\sqrt{x^2+1}) - \log x]$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^{x/2}}{x^3}$

118) Einem Patienten, der zur Nahrungsaufnahme nicht fähig ist, wird (mit einer konstanten Rate) Glukose (Traubenzucker) infundiert. $u(t)$ bezeichne den Glukosegehalt im Blut des Kranken; es sei $u(0) = u_0$ vorgegeben. Im Körper des Patienten möge die Glukose mit einer konstanten Rate β (= abgebaute Glukosemenge pro Sekunde und Gramm vorhandener Glukosemenge) abgebaut werden. Stellen Sie die Differentialgleichungen für u auf, die diesen Prozeß beschreibt, und lösen Sie das entsprechende Anfangswertproblem! Zeigen Sie, daß $u(t)$ für $t \to \infty$ einem Grenzwert zustrebt! Welchem?

119) Wir verfolgen Licht, das sich (längs einer Geraden z.B. von links nach rechts) fortpflanzt. $n(x)$ sei die Zahl der Photonen in der Position x pro cm der Geraden (die sog. Zahlendichte; im 3D Fall ist sie entsprechend als Zahl der Photonen an einer Stelle pro cm^3 definiert.) Wir betrachten den stationären Zustand, d.h., die Phänomene mögen zeitunabhängig sein (sodaß t gar nicht explizit vorkommt). Begründen Sie einen Ansatz $n(x + \triangle x) \sim n(x) - \beta n(x)\triangle x$ (mit einem $\beta > 0$) für den Fall, daß gleichmäßige Absorption vorliegt. β heißt Absorptionskoeffizient.

Formulieren und lösen Sie die entsprechende Differentialgleichung. Bestimmen Sie die „Halbwertslänge“ ξ, d.h. jene Größe, sodaß $n(x+\xi) = n(x)/2\,\forall x$.

120) Was geschieht im Fall, daß $\beta < 0$ ist (sog. stimulierte Emission nach A. Einstein)?

121) $x(t)$ bezeichne die Höhe eines Körpers über dem Erdboden und $g(> 0)$ die (konstante) Schwerebeschleunigung. Was sagt die DGL

$$\ddot{x}(t) = -g$$

aus? Finden Sie mit Potenzreihenansatz alle ihre Lösungen. Stellen Sie die Gleichung für den Fall mit Reibung auf (die proportional zur Geschwindigkeit sein soll) und untersuchen Sie auch diese mit Potenzreihenansatz.

122) $n(t)$ bezeichne die Anzahl der Lebewesen einer Art zur Zeit t. Weshalb wird man für den Fall einer ungestörten Vermehrung eine Gleichung der Form

$$\dot{n} = \alpha n \tag{A}$$

annehmen können ($\alpha > 0$ heißt Vermehrungsrate)? Was gilt für jede Lösung n für $t \to \infty$ (falls $n(0) > 0$)?

123) Berechnen Sie für $z = 1+i$ und $w = -1+i$: $|z|$, $|w|$, $\arg z$, $\arg w$. Ermitteln Sie ferner $z \cdot w$ durch direkte Multiplikation sowie unter Benutzung der Beträge bzw. Argumente. Überprüfen Sie, ob die Resultate übereinstimmen.

124) Es sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Zeigen Sie: $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ und $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg z$. Verwenden Sie dies, um für $z = 1+i$ und $w = -1+i$: $\frac{1}{z}$ bzw. $\frac{1}{w}$ zu bestimmen.

125) Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach z auf:
a) $iz = 3+5i$, b) $(1+i)z = -i$, c) $(i+i^3)z = 2$, d) $(i-i^3)z = 2$, e) $z = \frac{1}{z}$.

126) Berechnen Sie für $x = 8-6i$, $y = 5+12i$: $\mathrm{Re}\, x$, $\mathrm{Im}\, x$, $\bar{x}$, $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$.

127) Berechnen Sie für $x = 4+i$, $y = 1-5i$: $\mathrm{Re}\, x$, $\mathrm{Im}\, y$, $\bar{x}$, $x+3iy$, xy, $\frac{x}{y}$.

128) Berechnen Sie $(2+3i)^2$, $(2+3i)^3$ und $(4+i)(5-i)^2 + (2+i)(-\frac{i}{2})$.

129) Überprüfen Sie für die Funktion $f(x,y) = \frac{1}{xy^2}$, daß (für $x \neq 0$, $y \neq 0$): $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ist.

130) Geben Sie die (im Sinne unserer Definition) beste (affin) lineare Approximation von $f(x,y) := \log(xy)$ um die Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$ an ($\log$ = natürlicher Logarithmus). Berechnen Sie mit ihrer Hilfe näherungsweise $\log(xy)$ für $x = 1.1$, $y = 0.9$ und vergleichen Sie dies mit dem exakten Wert. Ebenso für $x = 1.01$, $y = 0.99$.

131) Stellen Sie die Jacobi-Matrix zu

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ 2xyz \end{pmatrix}$$

auf ($f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$).

132) Die Schnittkurve K der beiden Flächen $\mathrm{Graph}(f) := \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ bzw. $\mathrm{Graph}(g)$ mit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^3y - x^2y^3, \\ g(x,y) &= 3xy^3 + x^3y^2 - 5 \end{aligned}$$

durchstößt die (x,y)-Ebene nahe dem Punkte $(x_0,y_0) = (1,1)$. Um zu einer verbesserten Kenntnis des Durchstoßungspunktes zu gelangen, gehe man folgendermaßen vor:

i) man bestimme die Gleichung der Tangentialebene an $\mathrm{Graph}(f)$ in $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

ii) man gehe entsprechend für g vor

iii) man bringe die Schnittgerade dieser beiden Ebenen mit der (x,y)-Ebene zum Schnitt (d.h. mit der Ebene $z=0$); somit erhält man einen Punkt (x_1,y_1). Daß er gegenüber (x_0,y_0) verbessert ist, liest man an $f(x_1,y_1)$ bzw. $g(x_1,y_1)$ ab. (Weshalb?)

Dieses Verfahren läßt sich natürlich zu weiterer Genauigkeitssteigerung iterativ fortsetzen. Kommt Ihnen das Prinzip bekannt vor?

133) Die Funktion

$$u(x,y,t) = \sin x \cos y \cos(x+y)\cos(x-y)\cos(\omega t)$$

beschreibt für $t > 0$ eine mögliche Schwingungsform einer elastischen Membrane im Rechteck $|x| + |y| \le \frac{\pi}{2}$. Am Rand dieses Rechtecks, $\{(x,y) : |x| + |y| = \frac{\pi}{2}\}$, ist stets $u = 0$. $u(x,y,t)$ bezeichnet dabei die Auslenkung der Membrane im Punkt (x,y) und zur Zeit t über (bzw. unter) die (x,y)-Ebene hinaus. Sie ist also am Rand fest in der (x,y)-Ebene eingespannt.
Zeigen Sie:

i) u genügt der Schwingungs- oder Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

wobei c und die Kreisfrequenz ω in einem Zusammenhang stehen (in welchem?)

ii) Bestimmen Sie die Knotenlinien von u, d.h.,

$$\{(x,y) : u(x,y,t) = 0 \ \forall t\}.$$

134) Das Potential einer elektrischen Punktladung im Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^3$ ist $U(x) = \frac{c}{\|x-x^0\|_2}$ $(x \neq x^0)$ mit einer geeigneten reellen Konstante c.
$E(x) := -\operatorname{grad} U(x)$ ist der Vektor der elektrischen Feldstärke.

Berechnen Sie $E(x)$. Zeigen Sie, daß $E(x)$ immer auf x^0 hinweist. In welche Richtung hin nimmt U am raschesten zu bzw. ab?
Betrachten Sie speziell den Fall $x^0 = 0 \in \mathbb{R}^3$, $x = (1,0,0)^t$. Geben Sie zwei (linear unabhängige) Richtungen r an, für die $\frac{\partial U}{\partial r}(x) = 0$ ist. Welche einfache geometrische Betrachtung hilft, solche Richtungen zu erraten? Wie kann man andererseits derartige Richtungen leicht mit Hilfe der linearen Algebra angeben?

135) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$$

i) die Extremstellen (nebst Typ) bzw. die Sattelpunkte

ii) die Extremstellen in $\left\{(x,y) : |x| \le \frac{5}{2}, |y| \le 2\right\}$ und

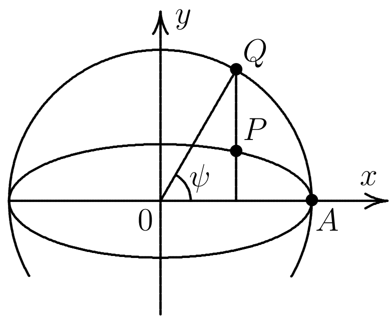
iii) die Taylor-Entwicklung um den Punkt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

136) Bestätigen Sie, daß die Gleichung $y + 2x = e^{2y/x}$ für $x > 0$ in zweierlei Art nach y aufgelöst werden kann, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$. Bestimmen Sie den gemeinsamen Definitionsbereich von f_1 und f_2. Skizzieren Sie beide Graphen (ermitteln Sie dazu insbesonders die Nullstellen von f_1' und f_2').
Wie sieht die Sache bei Auflösung nach $x, x = g(y)$, aus?

137) In der Himmelsmechanik (Bahnbewegung eines Planeten) stößt man auf die Kepler-Gleichung, die einen Zusammenhang zwischen dem Winkel ψ (siehe Skizze) und der Zeit t herstellt,

$$\frac{2\pi t}{T} = \psi - \varepsilon \sin \psi.$$

T ist dabei die Umlaufzeit, ε $(0 < \varepsilon < 1)$ die sogenannte numerische Exzentrizität der Bahnellipse. Der Punkt P in der Skizze stellt den Ort des Planeten dar.



Zeigen Sie, daß die Keplergleichung implizit genau eine Funktion $\psi = \psi(t)$ definiert, und ermitteln Sie die Extremstellen von ψ.

138) Finden Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = xy$, wenn (x,y) den Einheitskreis $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ durchläuft.

139) Bestimmen Sie 3 Zahlen a, b, c, sodaß $a + b + c = 90$ und $a^2 + b^2 + c^2 = \text{Min!}$

140) Finden Sie unter allen Quadern der Oberfläche 2 denjenigen mit maximalem Volumen!

141) Betrachten Sie eine Zustandsgleichung von Gasen,

$$f(p, \rho, T) = 0.$$

Zeigen Sie, daß $\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p} = -1$ (also nicht $+1$, wie naives Kürzen ergäbe). Überprüfen Sie dies explizit für die Zustandsgleichung

$$f(p, \rho, T) = p - c\rho T = 0 \quad (c \in \mathbb{R}),$$

indem sie jeweils nach einer der thermodynamischen Variablen auflösen.

142) Berechnen Sie $\int\limits_Q (1-x)d(x,y)$, wobei $Q = [0,1] \times [0,1]$.

143) Ebenso $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (xye^{x+y})\, dy\, dx$, $\int\limits_0^1 \int\limits_1^2 (-x \log y)\, dy\, dx$.

144) Eine Platte, beschrieben durch $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ (Einheiten in cm) hat die Massedichte $\rho(x,y) = ye^{xy}\,\mathrm{g\,cm^{-2}}$. Berechnen Sie die Gesamtmasse und den Schwerpunkt!

145) Der geometrische Schwerpunkt eines Bereiches D ist der Schwerpunkt, der sich bei konstanter Massedichte in D ergibt. Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt für $D = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

146) Zeigen Sie (durch Übergang zu passenden neuen Koordinaten bei der Integration): Ein Kreissektor mit Radius r und Öffnungswinkel α hat die Fläche $\frac{1}{2}r^2\alpha$.

147) K_ρ sei der Teil des Kreises mit Mittelpunkt 0 und Radius ρ, der im 1. Quadranten der (x,y)-Ebene liegt, $Q_\rho = [0,\rho] \times [0,\rho]$. Zeigen Sie $K_\rho \subseteq Q_\rho \subseteq K_{\rho\sqrt{2}}$. Bestätigen Sie ferner, daß

$$\int\limits_{K_\rho} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-\rho^2}) \quad \text{(Polarkoordinaten!) und}$$

$$\int\limits_{Q_\rho} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) = \Big(\int\limits_0^\rho e^{-x^2}\, dx\Big)^2 \quad \text{(Iterierte Integrale!).}$$

Aus $\displaystyle\int_{K_\rho} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) \uparrow \frac{\pi}{4}$ $(\rho \to \infty)$ ist zu schließen

$$\int_{Q_\rho} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) \uparrow \frac{\pi}{4} \ (\rho \to \infty), \quad \text{also}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{somit} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \quad \text{(L. Euler).}$$

148) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R (und Mittelpunkt 0) durch Übergang zu Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ).
Begründen Sie dabei insbesondere die Beziehungen
$x = r \cos\vartheta \cos\varphi$
$y = r \cos\vartheta \sin\varphi$
$z = r \sin\vartheta$

149) Zur Ermittlung des Volumens des Ellipsoides $E = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ ist der Übergang zu sog. verallgemeinerten Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) zweckmäßig, die mit (x, y, z) in der Beziehung

$$x = ar \cos\vartheta \cos\varphi$$
$$y = br \cos\vartheta \sin\varphi$$
$$z = cr \sin\vartheta$$

stehen. Geben Sie eine einfache geometrische Deutung von (r, φ, ϑ) und ermitteln Sie mit ihrer Hilfe das Volumen des Ellipsoides!

150) Die Zylinderkoordinaten eines Punktes (x, y, z) im Raume sind definiert als (r, φ, z). Dabei ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und φ der übliche Polarwinkel des Punktes (x, y) in der Ebene (Skizze!). Stellen Sie das Integral $\int_D f(x,y,z)\, d(x,y,z)$ in Zylinderkoordinaten dar!

151) Verwenden Sie das Resultat, um die Masse des Bereiches $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ zu bestimmen, der mit der Dichte $\rho(x,y,z) = z^2x^2 + z^2y^2$ belegt ist!

152) Drücken Sie $\Delta f(x, y, z)$ in Zylinderkoordinaten aus!

153) Der $\mathbb{R}^3$ sei mit Masse erfüllt, und zwar mit einer Dichte $\rho(x,y,z) = r^\alpha$ $(0 \leq r \leq 1)$, bzw. $\rho(x,y,z) = r^\beta$ $(r > 1)$. Dabei ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Für welche Werte von α bzw. β ist die Masse endlich, und wie groß ist sie in diesem Falle?

154) $D \subseteq \mathbb{R}^3$ sei ein Bereich, $f : D \to \mathbb{R}$. Das Mittel von f in D, $\overline{f}_D$, wird definiert durch $\overline{f}_D = \frac{1}{|D|} \int_D f(x,y,z) d(x,y,z)$. Machen Sie diese Definition plausibel. Nunmehr sei

D mit Masse erfüllt, u.zw. mit einer konstanten Massedichte ρ; die Gesamtmasse von D bezeichnen wir mit M. Befindet sich nun in einem Punkt (x_1, y_1, z_1) eine Masse m, so ist das Gravitationspotential für diesen Körper

$$U(x_1, y_1, z_1) = Gm \int\limits_D \frac{\rho}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}\, d(x,y,z).$$

Zeigen Sie, daß $U = \overline{\left[\frac{1}{r}\right]}\, GmM$ ist, wobei $r = \sqrt{(x-x_1)^2 + \ldots}$. (Zusatzfrage: ist zu erwarten, daß $\overline{\left[\frac{1}{r}\right]} = \frac{1}{\bar{r}}$?)

155) Eine Kugelschale $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : R_1 \leq \|x\| \leq R_2\}$ ist elektrisch homogen geladen. Ähnlich wie bei der Gravitation ergibt sich dann ein Potential, das bei Verwendung passender Einheiten die Gestalt

$$U(x) = \int\limits_D \frac{1}{\|x-y\|}\, dy$$

hat. Drücken Sie dies in Kugelkoordinaten aus ($\|x\| = r$, $\|y\| = \rho$) und zeigen Sie, daß das Potential dann nur von r abhängt, u.zw.

$$\hat{U}(r, \varphi, \vartheta) = U^*(r) = \int\limits_0^\pi \int\limits_{-\pi}^\pi \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2 \sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos\vartheta}}\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta.$$

Berechnen Sie für $R_1 = 2$, $R_2 = 4$: $U^*(r)$. (Fälle: $0 \leq r \leq R_1$; $R_1 \leq r \leq R_2$; $R_2 \leq r < \infty$).

156) Ein Massepunkt durchläuft als Funktion der Zeit t die nachstehend angegebenen Kurven, sodaß also $\gamma(t)$ die Position des Massepunktes zur Zeit t ist. Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor, die Geschwindigkeit sowie die Länge des zurückgelegten Weges.

a) $\gamma(t) = \binom{x_1}{y_1} + t\binom{x_2-x_1}{y_2-y_1}$ $\quad 0 \leq t \leq 1 \quad$ (Deutung des Weges?)

b) $\gamma(t) = \binom{x_0 + r\cos t}{y_0 + r\sin t}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi,\ r > 0$ fest

c) $\gamma(t) = \binom{x_0 + r\cos 2t}{y_0 + r\sin 2t}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad$ (Deutung?)

157) Weg in der Ebene in Polarkoordinaten. φ habe die für Polarkoordinaten übliche Bedeutung. Unter einem Weg $r = f(\varphi)$ (f eine Funktion mit nur pos. Werten, entsprechend glatt) verstehen wir, in der üblichen Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten, den Weg

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} f(\varphi)\cos\varphi \\ f(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Deuten Sie diese Begriffsbildung.
Für $f(\varphi) = \rho$ (konst.) erhält man also den Kreis mit Radius ρ, für $f(\varphi) = \varphi$ die sogenannte archimedische Spirale (Skizze). Zeigen Sie, daß die Länge des Weges

im Bereich $a \le \varphi \le b$ durch

$$L = \int_a^b \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi$$

gegeben ist.

158) Berechnen Sie mit Hilfe des Resultats die Länge des Teils der archimed. Spirale (s.o.) für $0 \le \varphi \le 2\pi$, sowie der sogenannten Kardioide, $r(\varphi) = a(1+\cos\varphi)$, wieder für $0 \le \varphi \le 2\pi$.

159) Es sei $0 < b < a$. Durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

ist eine Ellipse gegeben (Begründung). Zeigen Sie, daß ihr Umfang

$$L = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt$$

ist, mit $\varepsilon := \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$.
Werten Sie dieses Integral (sog. ellipt. Integral) aus, indem Sie von der für $|u| < 1$ glm. konvergierten Taylorentwicklung

$$\sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2 \cdot 4}u^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}u^3 - \dots$$

Gebrauch machen.

160) Berechnen Sie folgende Wegintegrale (γ in Zeilenform)
a) $\int_\gamma ydx + xdy, \quad \gamma(t) = (t, t^2), \quad 0 \le t \le 1$
b) $\int_\gamma xdy - ydx, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad -\pi \le t \le \pi$
c) $\int_\gamma e^x dx + e^y dy, \quad \gamma(t) = (\sqrt{t}, t), \quad 0 \le t \le 1$
d) $\int_\gamma xydx + ye^x dy$, γ der geschl. Polygonzug durch die Punkte $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ und $(0,0)$

161) Unter der Wirkung des Kraftfeldes

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

bewegt sich ein Massepunkt auf der Parabel $y = x^2$ von $(1,1)$ nach $(2,4)$. Berechnen Sie die entsprechende Arbeit!

162) n sei eine natürliche Zahl $n > 2$. Zeigen Sie durch Konstruktion einer Stammfunktion F, daß das Vektorfeld mit den Komponenten x/r^n, y/r^n, z/r^n ein Gradientenfeld auf $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ ist. ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).
(Anl.: Vgl. S. 11.4.1 zur Konstruktion von F).

163) Führen Sie die in der Vorlesung begonnene Berechung des Dipolpotentials zu Ende.

164) Das Paraboloid P hat die Parameterdarstellung

$$x(u,v) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ 2uv \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Berechnen Sie die Gaußschen Fundamentalgrößen

b) Welche Raumkurven werden durch $u = \text{const.}$ bzw. $v = \text{const.}$ dargestellt? In welchen Punkten von P schneiden sich die u- bzw. v-Isolinien (d.h. die Kurven $u = \text{const.}$ bzw. $v = \text{const.}$) senkrecht?

c) Welche Bogenlänge hat die Kurve γ auf P mit der Parameterdarstellung $u = 2t$, $v = 3t$, $0 \leq t \leq 1$?

165) Es sei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (im Sinne ebener Polarkoordinaten) und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (glatte) Funktion. Begründen Sie, weshalb durch

$$(r,\varphi) \to \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ f(r) \end{pmatrix}$$

eine Rotationsfläche (Drehung einer Kurve in der xz-Ebene um die z-Achse) gegeben ist. Geben Sie eine möglichst einfache Formel für die Oberfläche des zum Parameterbereich $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $a \leq r \leq b$ gehörigen Teiles an (Arbeiten mit Gaußschen Fundamentalgrößen).

166) Die Kuppel des Reaktors in Garching bei München hat die Gestalt eines halben Rotationsellipsoides

$$\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{15^2} + \frac{z^2}{30^2} = 1, \quad z \geq 0$$

(Längen in m). Welchen Flächeninhalt hat das Blechdach?
(Anl.: vorhergehendes Beispiel).

167) Der Membranmantel eines Kühlturms hat die Form eines sog. einschaligen Rotationshyperboloids. Dabei wird das Hyperbelstück $x^2/37^2 - z^2/67^2 = 1$, $-114 \leq z \leq 32$, $x > 0$, um die z-Achse gedreht. Wie groß ist die Oberfläche?

168) Stellen Sie die Oberfläche Δ der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ in der Parametergestalt

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \qquad \left(-\pi \le u \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}\right)$$

dar. Deuten Sie u und v. Berechnen Sie sodann

$$\int\limits_{\Delta} (x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2)!$$

169) Δ sei nunmehr die obere Hälfte der Oberfläche der Einheitskugel ($x_3 \ge 0$). p sei ein fester Punkt auf der x_3-Achse, $p = (0,0,\zeta)$, sodaß $p \notin \Delta$. q variiere im folgenden in Δ, und es sei $r = \|p - q\|_2$. Berechnen Sie dann

$$J = J(\zeta) := \int\limits_{\Delta} \frac{1}{r}\, do$$

und geben Sie eine Deutung, wo ein derartiges Integral vorkommen könnte! Bestimmen Sie ferner $\lim\limits_{\zeta \to \infty} \zeta J(\zeta)$.

170) Δ wie im vorigen Beispiel. Wie groß ist

$$\int\limits_{\Delta} \left(x^2 + y^2\right) do?$$

171) Die Fläche Δ sei gegeben durch

$$x(u,v) = (u \cos v, u \sin v, v)^t, \qquad 0 \le u \le 1, \quad -\pi \le v \le \pi.$$

Das Vektorfeld $\mathbf{f}$ habe die Gestalt

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (y, -x, 0)^t.$$

Berechnen Sie $\int\limits_{\Delta} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, do$!

172) In dieser und den folgenden zwei Aufgaben bezeichnen $a, b, \dots$ (konstante) Vektoren im $\mathbb{R}^3$, $u, v, \dots$ (vektorwertige) Funktionen, d.h. Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; f, g bezeichne reellwertige Funktionen, d.h. Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ oder $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. Alle Funktionen seien gehörig differenzierbar. $x(\in \mathbb{R}^3)$ bezeichnet die unabhängige Variable in diesen Funktionen.
Zeigen Sie dann:

$$\begin{aligned} \nabla\big(f(g(x))\big) &= f' \nabla g(x) \\ \nabla(a \cdot x) &= a \\ \nabla \cdot x &= 3 \\ \nabla \wedge x &= 0 \end{aligned}$$

173) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\nabla(u \cdot v) &= (u \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u + u \wedge (\nabla \wedge v) + v \wedge (\nabla \wedge u) \\
\nabla \left(\frac{v \cdot v}{2} \right) &= (v \cdot \nabla)v + v \wedge (\nabla \wedge v) \\
\nabla \cdot (u \wedge v) &= (\nabla \wedge u) \cdot v - u \cdot (\nabla \wedge v) \\
\nabla \wedge (u \wedge v) &= u(\nabla \cdot v) - v(\nabla \cdot u) + (v \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)v
\end{aligned}$$

(Beachten Sie dabei, daß insbesondere das Vorhandensein bzw. Fehlen von Punkten für innere Produkte ganz wesentlich ist!) Drücken Sie alle Formeln auch mit grad, div, rot aus!

174) Mit $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\Delta u = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla \wedge (\nabla \wedge u) \\
&\nabla \wedge (\nabla f) = 0 \\
&\nabla \cdot (\nabla \wedge u) = 0
\end{aligned}$$

175) Die Matrix ε (in der Physik: antisymmetr. Einheitstensor 3. Ranges oder Levi-Civitá-Matrix bzw. -Tensor) ist die 3×3 Matrix mit den Elementen

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \ \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1, \ \varepsilon_{ijk} = 0 \text{ sonst.}$$

Zeigen Sie:

$$a \wedge b = b \cdot \varepsilon \cdot a$$

176) Betrachten Sie die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ im $\mathbb{R}^1$, dazu Anfangsbedingungen $u(0, x) = g(x)$, $u_t(0, x) = h(x)$.
Die Anfangsbedingungen seien mit der Periode 2π periodisch. Geben Sie die allgemeine Lösung der Gleichung (d.h. ohne Anfangsbedingungen) mit dem Fourier-Ansatz $u(t, x) = \sum a_k(t)e^{ikx}$ an. Drücken Sie ferner — unter Beachtung der Anfangsbedingungen — die $a_k(t)$ durch die Fourier-Koeffizienten von g und h aus.
Extraaufgabe: können Sie die Lösung so darstellen, daß in ihr die nach rechts bzw. links laufende Welle klar sichtbar wird?

177) Für jede ganze Zahl $n \geq 0$ kann die n-te Besselfunktion $J_n(x)$ durch

$$J_n(x) = \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\pi} \int_{-1}^{1} \cos(xt) \left(1 - t^2\right)^{n-1/2} dt$$

definiert werden.
Zeigen Sie:

a) $J_n'' + \frac{1}{x}J_n' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n = 0$

b) $J_{n+1}(x) = J_{n-1}(x) - 2J_n'(x)$ und $J_1 = -J_0'$