Vorwort

Drei Facetten machen den Inbegriff der Linearen Algebra oder entsprechend überhaupt jedes größeren mathematische Gebietes aus. Zuerst geht es um den *Kerninhalt* der Linearen Algebra für sich. Dann steht die Lineare Algebra in zahlreichen *Querverbindungen* zu den *anderen mathematischen Disziplinen*, auf der hier relevanten Ebene insbesondere zur Analysis, die ja, wie die Lineare Algebra, am Eingang jedes mathematischen oder mathematisch orientierten Studiums steht. Drittens nennen wir die erstaunliche Eigenschaft mathematischer Begriffe, in vielem die *adäquate Ausdrucksform* für *unterschiedlichste andere Wissenschaften* zu sein.
Dieses Buch will eine Einführung in die Lineare Algebra für ein Studium der Mathematik und überhaupt der mathematisierbaren Disziplinen bieten. Dabei soll die Einführung insofern vollständig sein, als allen drei aufgeführten Aspekten reichlich Raum gegeben wird. Da es unseres Wissens eine derartige, ähnlich tief eindringende Darstellung in deutscher Sprache sonst nicht gibt, wird das Buch, wie wir hoffen, seinen Wert besitzen. – Was dürfen Leserin und Leser demnach erwarten?

- Zunächst geht es also um die *Kerninhalte* der Linearen Algebra. Ursprünglich vor allem in Zusammenhang mit geometrischen Anwendungen entwickelt, lässt die Lineare Algebra die Motivierung vieler dann durchaus abstrakter Begriffe aus sehr anschaulichen Überlegungen heraus zu, was der Verständlichkeit sehr zugute kommt. Diese Gelegenheit, den Zugang möglichst schonend zu gestalten, lassen wir uns nicht entgehen. Die Kerninhalte sind für die folgenden Punkte unentbehrlich .

- Wir stellen also auch *Querverbindungen zur Analysis* her, die ja gewöhnlich parallel zu unserem Gebiet gehört wird, bevölkern dadurch jenes merkwürdige Niemandsland, das sich nicht selten zwischen Linearer Algebra und Analysis erstreckt, und demonstrieren zugleich die Kraft der Methoden der Linearen Algebra, nicht zuletzt auch dadurch, dass man ohne besondere Schwierigkeiten in Regionen vorstößt, die der Analysis erst wesentlich später zugänglich sind, wie etwa gewisse partielle Differentialgeichungen; sie stellen sich uns als wenn auch großes so doch relativ einfach zu lösendes lineares Gleichungssystem dar.

- Vielleicht noch erstaunlicher ist die Breite, in der die Mathematik, hier eben die Lineare Algebra, auf *andere Wissenschaften inklusive Technik, anwendbar* ist; unterschiedlichste Problemstellungen (aus Sicht der Einzelwissenschaften) lassen sich dabei oft mit denselben mathematischen Begriffen fassen bzw. lösen. Dementsprechend ist es natürlich, dies an ganz unterschiedlichen Beispielen zur Datenanalyse, Bildverarbeitung, den physikalischen

Wissenschaften (Wärmeleitungsgleichung, Advektionsgleichung) u.a. deutlich zu machen. Dass auch die Lineare Optimierung nicht fehlt, versteht sich; hier zeigen die Beispiele wieder, dass dieses Gebiet nicht nur für Wirtschaftswissenschaften relevant ist, sondern darüber hinaus auch für Mathematik (Approximation), Steuerung technischer System usw.

- In der realen Anwendung der Linearen Algebra vollzieht sich innerhalb wie außerhalb der Mathematik i.e.S. ein entscheidender Wandel. *Numerische Verfahren*, die früher mühsamer Programmentwicklungen bedurft haben, lassen sich heute durch leistungsstarke PCs sowie mächtige Softwarepakete bzw. Programmbibliotheken leicht anwenden; der Kreis derjenigen, die Lineare Algebra in diesem Sinn wirklich nutzen, erweitert sich aus diesem Grund ständig. Die Besprechung *numerischer Methoden* darf also nicht fehlen; zahlreiche unserer Beispiele wären ohne sie undurchführbar. Dazu kommen *Programmbeispiele* in einem wohl weitgehend selbsterklärenden Pseudocode, die hoffentlich zu recht vielen eigenständigen Experimenten anregen; mehr dazu später im Vorwort.

Aufbau des Buches. Natürlich kann das Buch von A-Z gelesen werden. Es wäre freilich eine schädliche Pedanterie, ein solches Werk unter allen Umständen Seite für Seite durchzugehen. – Am ehesten wird man geneigt sein, das erste Kapitel zu überspringen, ist doch der Inhalt vielen Lesern sicher weitgehend bekannt. (Vielen Leserinnen natürlich gleichermaßen. Wir wollen aber allzu gewundene oder holprige Sprachkonstrukte vermeiden und vertrauen darauf, dass unsere Leserinnen sich auch bei Verwendung des grammatikalischen Geschlechts voll angesprochen fühlen. Schrieben wir Latein, so stünden wir nicht an, das Femininum *persona* oft zu gebrauchen.) Gerade das erste Kapitel sollte aber nicht leichtfertig übersprungen werden, erleichtert doch die Betrachtung vieler an sich bekannter Sachverhalte vom elementaren wie auch vom höheren Standpunkt aus den notwendigen Übergang zu einer Denk- und Sprechweise, die für die Mathematik letztlich entscheidend ist.
Die Kapitel 2-8, möglicherweise 2-9, machen den traditionellen Kern der Linearen Algebra aus. Bei uns sind schon hier Anwendungen wesentlich ausgiebiger ausgefallen als sonst häufig. Wir hoffen, dass auch ein eiliger Leser, der vielleicht zunächst nur das Gerüst im Sinne hat und die größeren Anwendungen zuerst überschlägt, später zu ihnen zurückkehrt, weil dort wirklich interessante und wichtige Dinge stehen (Abschnitte 3.6, 3.7, 7.7, 7.8, 8.8-8.10).
Von den sehr anwendungsorientierten Kapiteln 10-12 kann jedes weitgehend für sich studiert werden, trotz natürlich bestehender Querverbindungen. Man wird es sicherlich z.B. im Kapitel 10 (partielle Differentialgleichungen) als äußerst bemerkenswert empfinden, zu welch großer und zu Beginn sicher ungeahnter Tragfähigkeit sich Motive entfalten, die schon recht früh und harmlos aufgetreten sind (u.a. orthogonale Projektionen im ersten Kapitel); Ähnliches gilt in Hinblick auf Kapitel 11 (numerische Verfahren), aber auch schon früher, z.B. bei der Fouriertransformation.
Am Ende der Kapitel 11 und 12 findet man *Literatur* für tieferes Studium.

Programmbeispiele. Die Programmbeispiele illustrieren die Implementation von Verfahren und beschreiben die Methoden manchmal besser als eine Abfolge von Formeln. Wir geben die Beispiele als *Pseudocode*, der ziemlich unmittelbar verständlich ist. Die Versuchung, den Code in einer bestimmten Programmiersprache zu schreiben, ist für uns keine gewesen; denn es gibt mittlerweile eine Fülle von Entwicklungsumgebungen bzw. Sprachen, und nichts hätte dem Verfasser ferner liegen können, als durch Wahl welcher Plattform auch immer die Mehrheit der Leser gegen sich aufzubringen, die auf einer anderen Plattform arbeiten, z.B., weil diese an ihrer Universität eingeführt ist. Außerdem kann man in einem Pseudocode die Darstellung auf das Wesentliche konzentrieren und vermeidet die Erdenschwere, die jeder konkreten Implementation doch anhaftet.
Natürlich hoffen wir, dass die Programmbeispiele und diverse Anregungen möglichst oft in wirkliche Programme umgesetzt und Erfahrungen mit den Methoden gesammelt werden. Dass entsprechende, gegenüber dem Herkömmlichen erweiterte Übungen zunehmend an den Universitäten angeboten werden, wird zu Versuchen zusätzlich anregen. Es ist eindrucksvoll, wie viele Aufgaben heute der numerischen Behandlung oft sogar relativ leicht zugänglich sind, an deren analytische Lösung nicht gedacht werden kann.
Für derartige Experimente kann man sich kommerzieller Umgebungen wie Matlab, Mathematica o.dgl. bedienen, die auch viele der Verfahren der Linearen Algebra schon bereitstellen. Erfreulicherweise existiert mit SCILAB hier auch eine frei erhältliche, sehr brauchbare Entwicklungsumgebung (*http://www.scilab.org*). – Programmiersprachen wie Fortran, C++ oder Java sind eine Alternative. In diesem Fall wird man auf fertige Programmbibliotheken, oft *public domain*, wie etwa LAPACK für grundlegende Verfahren zurückgreifen; siehe insbesondere das Netlib Repository (*http://www.netlib.org*).

Aufgaben. Für eine Anzahl der Aufgaben, die man nach zahlreichen Abschnitten findet und deren selbständige Durchführung für eine Beherrschung des Stoffes unverzichtbar ist, sind unter (*http://www.univie.ac.at/acore/linalg.htm*) Lösungen gegeben .

Danksagung. Zunächst möchte ich mich bei meiner Frau Claudia herzlich dafür bedanken, dass sie durch ihren persönlichen Einsatz mir ein effizienten Arbeiten in der arbeitsintensiven Zeit der Erstellung des Buches ermöglicht hat. Bei Herrn B. Löw-Baselli bedanke ich mich für ein Durchsehen des Buches und eine Anzahl von Korrekturen, bei Herrn Chr. Obertscheider für die Erstellung der Abbildungen. Dem Elsevier-Verlag (Dr. A. Rüdinger, B. Alton) danke ich für gute Zusammenarbeit, Herrn Dr. Rüdinger insbesondere auch für Anregungen hinsichtlich Didaktik und Inhalt. Dank schulde ich schließlich auch Dr. J. Chen (UC Davis) und B. Lutzmann in Hinblick auf Abbildung 9.3 und Herrn J. Arnberger für wertvolle Hinweise.

Elsarn im Strassertal, September 2005

Inhaltsverzeichnis