

Vorwort

Drei Facetten machen den Inbegriff der Linearen Algebra oder entsprechend überhaupt jedes größeren mathematische Gebietes aus. Zuerst geht es um den *Kerninhalt* der Linearen Algebra für sich. Dann steht die Lineare Algebra in zahlreichen *Querverbindungen* zu den *anderen mathematischen Disziplinen*, auf der hier relevanten Ebene insbesondere zur Analysis, die ja, wie die Lineare Algebra, am Eingang jedes mathematischen oder mathematisch orientierten Studiums steht. Drittens nennen wir die erstaunliche Eigenschaft mathematischer Begriffe, in vielem die *adäquate Ausdrucksform* für *unterschiedlichste andere Wissenschaften* zu sein.

Dieses Buch will eine Einführung in die Lineare Algebra für ein Studium der Mathematik und überhaupt der mathematisierbaren Disziplinen bieten. Dabei soll die Einführung insofern vollständig sein, als allen drei aufgeführten Aspekten reichlich Raum gegeben wird. Da es unseres Wissens eine derartige, ähnlich tief eindringende Darstellung in deutscher Sprache sonst nicht gibt, wird das Buch, wie wir hoffen, seinen Wert besitzen. – Was dürfen Leserin und Leser demnach erwarten?

- Zunächst geht es also um die *Kerninhalte* der Linearen Algebra. Ursprünglich vor allem in Zusammenhang mit geometrischen Anwendungen entwickelt, lässt die Lineare Algebra die Motivierung vieler dann durchaus abstrakter Begriffe aus sehr anschaulichen Überlegungen heraus zu, was der Verständlichkeit sehr zugute kommt. Diese Gelegenheit, den Zugang möglichst schonend zu gestalten, lassen wir uns nicht entgehen. Die Kerninhalte sind für die folgenden Punkte unentbehrlich .
- Wir stellen also auch *Querverbindungen zur Analysis* her, die ja gewöhnlich parallel zu unserem Gebiet gehört wird, bevölkern dadurch jenes merkwürdige Niemandsland, das sich nicht selten zwischen Linearer Algebra und Analysis erstreckt, und demonstrieren zugleich die Kraft der Methoden der Linearen Algebra, nicht zuletzt auch dadurch, dass man ohne besondere Schwierigkeiten in Regionen vorstößt, die der Analysis erst wesentlich später zugänglich sind, wie etwa gewisse partielle Differentialgleichungen; sie stellen sich uns als wenn auch großes so doch relativ einfach zu lösendes lineares Gleichungssystem dar.
- Vielleicht noch erstaunlicher ist die Breite, in der die Mathematik, hier eben die Lineare Algebra, auf *andere Wissenschaften inklusive Technik, anwendbar* ist; unterschiedlichste Problemstellungen (aus Sicht der Einzelwissenschaften) lassen sich dabei oft mit denselben mathematischen Begriffen fassen bzw. lösen. Dementsprechend ist es natürlich, dies an ganz unterschiedlichen Beispielen zur Datenanalyse, Bildverarbeitung, den physikalischen

Wissenschaften (Wärmeleitungsgleichung, Advektionsgleichung) u.a. deutlich zu machen. Dass auch die Lineare Optimierung nicht fehlt, versteht sich; hier zeigen die Beispiele wieder, dass dieses Gebiet nicht nur für Wirtschaftswissenschaften relevant ist, sondern darüber hinaus auch für Mathematik (Approximation), Steuerung technischer System usw.

- In der realen Anwendung der Linearen Algebra vollzieht sich innerhalb wie außerhalb der Mathematik i.e.S. ein entscheidender Wandel. *Numerische Verfahren*, die früher mühsamer Programmentwicklungen bedurft haben, lassen sich heute durch leistungsstarke PCs sowie mächtige Softwarepakete bzw. Programmbibliotheken leicht anwenden; der Kreis derjenigen, die Lineare Algebra in diesem Sinn wirklich nutzen, erweitert sich aus diesem Grund ständig. Die Besprechung *numerischer Methoden* darf also nicht fehlen; zahlreiche unserer Beispiele wären ohne sie undurchführbar. Dazu kommen *Programmbeispiele* in einem wohl weitgehend selbsterklärenden Pseudocode, die hoffentlich zu recht vielen eigenständigen Experimenten anregen; mehr dazu später im Vorwort.

Aufbau des Buches. Natürlich kann das Buch von A-Z gelesen werden. Es wäre freilich eine schädliche Pedanterie, ein solches Werk unter allen Umständen Seite für Seite durchzugehen. – Am ehesten wird man geneigt sein, das erste Kapitel zu überspringen, ist doch der Inhalt vielen Lesern sicher weitgehend bekannt. (Viele Leserinnen natürlich gleichermaßen. Wir wollen aber allzu gewundene oder holprige Sprachkonstrukte vermeiden und vertrauen darauf, dass unsere Leserinnen sich auch bei Verwendung des grammatikalischen Geschlechts voll angesprochen fühlen. Schrieben wir Latein, so stünden wir nicht an, das Femininum *persona* oft zu gebrauchen.) Gerade das erste Kapitel sollte aber nicht leichtfertig übersprungen werden, erleichtert doch die Betrachtung vieler an sich bekannter Sachverhalte vom elementaren wie auch vom höheren Standpunkt aus den notwendigen Übergang zu einer Denk- und Sprechweise, die für die Mathematik letztlich entscheidend ist.

Die Kapitel 2-8, möglicherweise 2-9, machen den traditionellen Kern der Linearen Algebra aus. Bei uns sind schon hier Anwendungen wesentlich ausgiebiger ausgefallen als sonst häufig. Wir hoffen, dass auch ein eiliger Leser, der vielleicht zunächst nur das Gerüst im Sinne hat und die größeren Anwendungen zuerst überschlägt, später zu ihnen zurückkehrt, weil dort wirklich interessante und wichtige Dinge stehen (Abschnitte 3.6, 3.7, 7.7, 7.8, 8.8-8.10).

Von den sehr anwendungsorientierten Kapiteln 10-12 kann jedes weitgehend für sich studiert werden, trotz natürlich bestehender Querverbindungen. Man wird es sicherlich z.B. im Kapitel 10 (partielle Differentialgleichungen) als äußerst bemerkenswert empfinden, zu welcher Größe und zu Beginn sicher ungeahnter Tragfähigkeit sich Motive entfalten, die schon recht früh und harmlos aufgetreten sind (u.a. orthogonale Projektionen im ersten Kapitel); Ähnliches gilt in Hinblick auf Kapitel 11 (numerische Verfahren), aber auch schon früher, z.B. bei der Fouriertransformation.

Am Ende der Kapitel 11 und 12 findet man *Literatur* für tieferes Studium.

Programmbeispiele. Die Programmbeispiele illustrieren die Implementation von Verfahren und beschreiben die Methoden manchmal besser als eine Abfolge von Formeln. Wir geben die Beispiele als *Pseudocode*, der ziemlich unmittelbar verständlich ist. Die Versuchung, den Code in einer bestimmten Programmiersprache zu schreiben, ist für uns keine gewesen; denn es gibt mittlerweile eine Fülle von Entwicklungsumgebungen bzw. Sprachen, und nichts hätte dem Verfasser ferner liegen können, als durch Wahl welcher Plattform auch immer die Mehrheit der Leser gegen sich aufzubringen, die auf einer anderen Plattform arbeiten, z.B., weil diese an ihrer Universität eingeführt ist. Außerdem kann man in einem Pseudocode die Darstellung auf das Wesentliche konzentrieren und vermeidet die Erdschwere, die jeder konkreten Implementation doch anhaftet.

Natürlich hoffen wir, dass die Programmbeispiele und diverse Anregungen möglichst oft in wirkliche Programme umgesetzt und Erfahrungen mit den Methoden gesammelt werden. Dass entsprechende, gegenüber dem Herkömmlichen erweiterte Übungen zunehmend an den Universitäten angeboten werden, wird zu Versuchen zusätzlich anregen. Es ist eindrucksvoll, wie viele Aufgaben heute der numerischen Behandlung oft sogar relativ leicht zugänglich sind, an deren analytische Lösung nicht gedacht werden kann.

Für derartige Experimente kann man sich kommerzieller Umgebungen wie Matlab, Mathematica o.dgl. bedienen, die auch viele der Verfahren der Linearen Algebra schon bereitstellen. Erfreulicherweise existiert mit SCILAB hier auch eine frei erhältliche, sehr brauchbare Entwicklungsumgebung (<http://www.scilab.org>). – Programmiersprachen wie Fortran, C++ oder Java sind eine Alternative. In diesem Fall wird man auf fertige Programmbibliotheken, oft *public domain*, wie etwa LAPACK für grundlegende Verfahren zurückgreifen; siehe insbesondere das Netlib Repository (<http://www.netlib.org>).

Aufgaben. Für eine Anzahl der Aufgaben, die man nach zahlreichen Abschnitten findet und deren selbständige Durchführung für eine Beherrschung des Stoffes unverzichtbar ist, sind unter (<http://www.univie.ac.at/acore/linalg.htm>) Lösungen gegeben .

Danksagung. Zunächst möchte ich mich bei meiner Frau Claudia herzlich dafür bedanken, dass sie durch ihren persönlichen Einsatz mir ein effizientes Arbeiten in der arbeitsintensiven Zeit der Erstellung des Buches ermöglicht hat. Bei Herrn B. Löw-Baselli bedanke ich mich für ein Durchsehen des Buches und eine Anzahl von Korrekturen, bei Herrn Chr. Obertscheider für die Erstellung der Abbildungen. Dem Elsevier-Verlag (Dr. A. Rüdinger, B. Alton) danke ich für gute Zusammenarbeit, Herrn Dr. Rüdinger insbesondere auch für Anregungen hinsichtlich Didaktik und Inhalt. Dank schulde ich schließlich auch Dr. J. Chen (UC Davis) und B. Lutzmann in Hinblick auf Abbildung 9.3 und Herrn J. Arnberger für wertvolle Hinweise.

Inhaltsverzeichnis

1	Zur Einführung	9
1.1	Aus der Mengenlehre	10
1.2	Der n -dimensionale Raum	14
1.3	Vektoraddition; skalares Vielfaches eines Vektors	16
1.4	Geraden	17
1.5	Die Geradengleichung in der Ebene	19
1.6	Das innere Produkt in der Ebene	22
1.7	Abstand Punkt – Gerade	27
1.8	Das innere Produkt im Raume	29
1.9	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren im \mathbb{R}^n	33
1.10	Das äußere Produkt im Raume	35
1.11	Ebenen im Raume; Abstand Punkt – Ebene	39
1.12	Abbildungen	43
2	Gruppen, Körper, lineare Räume	53
2.1	Gruppen	54
2.2	Körper	60
2.3	Lineare Räume oder Vektorräume	69
2.4	Das Erzeugnis	74
2.5	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	76
2.6	Basen in endlichdimensionalen Räumen	80
3	Lineare Abbildungen	87
3.1	Definition und Beispiele	88
3.2	Lineare Abbildungen und Matrizen	90
3.3	Zusammensetzung linearer Abbildungen	95
3.4	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	104
3.5	Invertierung linearer Abbildungen	127
3.6	Weiteres zum Eliminationsverfahren	131
3.7	Anwendung: Zur Wärmeleitungsgleichung	136
4	Geometrie linearer Abbildungen	143
4.1	Der Nullraum oder Kern	144
4.2	Das Bild	145
4.3	Basiswechsel	146
4.4	Der Rang einer linearen Abbildung	149
4.5	Direkte Summen; Quotientenräume	155

5	Lineare Abbildungen – Determinanten	167
5.1	Determinanten kleiner Matrizen	169
5.2	Permutationen	173
5.3	Determinanten – Vorbereitung	177
5.4	Grundeigenschaften von Determinanten	180
5.5	Algorithmisches	185
6	Eigenwerte und Eigenvektoren	195
6.1	Von den Polynomen	196
6.2	Eigenwerte und Eigenvektoren: Grundeigenschaften	202
6.3	Das charakteristische Polynom	204
6.4	Eigenräume	208
7	Innere Produkte und Normen	213
7.1	Inneres Produkt – reeller Fall	214
7.2	Inneres Produkt – komplexer Fall	218
7.3	Normierte Räume	220
7.4	Orthogonalisierung von Vektoren	223
7.5	Orthogonale Basen und andere	228
7.6	Adjunktion, Transposition und Hermite'sche Konjugation	231
7.7	Beste Approximation durch Teilräume	237
7.8	Ausgleichsprobleme	240
8	Adjungierte Transformation und selbstadjungierte Abbildungen	247
8.1	Die adjungierte Transformation	248
8.2	Normale Abbildungen	250
8.3	Selbstadjungierte Abbildungen	255
8.4	Orthogonale und unitäre Abbildungen	259
8.5	Bilinearformen und Sesquilinearformen	266
8.6	Synopsis: Gruppen linearer Abbildungen	273
8.7	Klassifikation der Kurven und Flächen zweiter Ordnung	277
8.8	Komplexe Exponentialfunktion und Fourierreihen	282
8.9	Die diskrete Fouriertransformation	287
8.10	Anwendungen der Fouriertransformation	294
9	Normalformen von Matrizen	301
9.1	Die Jordan'sche Normalform	303
9.2	Anwendung: Gewöhnliche Differentialgleichungen	310
9.3	Die Singulärwertzerlegung	316
10	Lineare Algebra und partielle Differentialgleichungen	331
10.1	Methode der Finiten Elemente	332
10.2	Wärmeleitungsgleichung: Symmetrie und Variationsprinzip	334
10.3	Die Ritz-Galerkin'sche Methode	342
10.4	Implementierung des Ritz-Galerkin'schen Verfahrens	344
10.5	Die von Neumann'sche Stabilitätsanalyse	347

11 Numerische Lineare Algebra	357
11.1 Householder-Matrizen und die QR -Zerlegung	359
11.2 Normen: Querverbindungen zur Analysis	366
11.3 Matrixnormen	371
11.4 Kondition von Gleichungssystemen	376
11.5 Iterative Lösung von Gleichungen: Das Prinzip	378
11.6 Die Verfahren von Jacobi und Gauß-Seidel	385
11.7 Mehrgitterverfahren	389
11.8 Das Verfahren der konjugierten Gradienten	393
11.9 Eigenwerte: Die Potenzmethode	403
11.10 Hessenbergmatrizen	406
11.11 Eigenwerte reeller symmetrischer Matrizen	409
12 Lineare Optimierung	413
12.1 Die Problemstellung	414
12.2 Konvexe Polyeder	421
12.3 Die Simplexmethode	431