Bemerkungen und Lösungen zu ausgewählten Übungsaufgaben

(wird laufend erweitert)

Kapitel 1

1.4 Beweis der ersten Beziehung in Gleichung 1.2

1. Sei $x \in L \cup (\bigcap\limits_{i \in I} M_i) \Rightarrow$ (a) oder (b)
   (a) $x \in L$ und daher $x \in L \cup M_i \quad \forall\, i \Rightarrow x \in \bigcap (L \cup M_i)$
   (b) $x \in \bigcap M_i \Rightarrow x \in M_i \quad \forall\, i \Rightarrow x \in L \cup M_i \ \ \forall\, i \Rightarrow x \in \bigcap (L \cup M_i)$
2. Sei $x \in \bigcap (L \cup M_i) \Rightarrow$ (a) oder (b)
   (a) $x \in L \Rightarrow x \in L \cup (\bigcap M_i)$
   (b) $x \notin L \Rightarrow$ wegen $x \in L \cup M_i \quad \forall\, i$ gilt $x \in M_i \quad \forall\, i \Rightarrow x \in \bigcap M_i \Rightarrow x \in L \cup \bigcap M_i$

1.5 $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$: Gesamtheit aller Geraden $\|$ zur y-Achse, die durch einen ganzzahligen Punkt der x-Achse gehen.

1.6 Nur für $a = 1$ existiert ein Schnittpunkt.

1.7 Die Geraden stimmen überein.

1.8 Genau für $a = -3$ hat das System unendlich viele Lösungen. Die Geraden stimmen dann überein.

1.10 Es sei $\mathbf{q}, \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ und $[\mathbf{q}] = [\mathbf{s}]$. Dann $\exists$ zu jedem $\mu \in \mathbb{R}$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda\mathbf{q} = \mu\mathbf{s}$; insbesondere zu $\mu = 1$ ein (sagen wir jetzt) τ mit $\tau\mathbf{q} = \mathbf{s}$. – Nun sei hingegen $[\mathbf{q}] \neq [\mathbf{s}]$. Ang., $\exists \mathbf{t} \in [\mathbf{q}] \cap [\mathbf{s}], \mathbf{t} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{t} = \lambda\mathbf{q} = \mu\mathbf{s}$ (λ, μ passend, $\neq 0$); nach Division durch μ mit $\tau := \frac{\lambda}{\mu}$: $\tau\mathbf{q} = \mathbf{s}$.

1.12 Zum zweiten Teil: es sei H die Halbebene, die von $\mathbf{x}_0 + [\mathbf{m}]$ begrenzt wird, $\mathbf{n}$ wie im Buch. Verschiebung um $-\mathbf{x}_0$ liefert $H - \mathbf{x}_0$, worauf der erste Teil unmittelbar anwendbar ist:

$$H - \mathbf{x}_0 = \{\mathbf{u} : \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle \geq 0\} \overset{+\mathbf{x}_0}{\Rightarrow} H \overset{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{u}}{=} \{\mathbf{x} : \langle \underbrace{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}_{\mathbf{u}}, \mathbf{n} \rangle \geq 0\}.$$

1.13 Zu i): parallel nicht möglich, da schon 1. und 3. Komponente nicht zu einander proportional.
orthogonal: ζ aus $2 \cdot 1 + 4 \cdot \zeta + 3 \cdot 3 = 0$.

1.15 In normierter Version ist $\mathbf{a} = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$. $\mathbf{z} = \mathbf{r} + \mu\mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{z}^* = \langle \mathbf{r} + \mu\mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle \ \mathbf{q} = \langle \mathbf{r}, \mathbf{q} \rangle + \mu\langle \mathbf{s}, \mathbf{q} \rangle = \ldots$ (einsetzen) und $\mathbf{x} - \mathbf{z} = \ldots$, somit $\| \mathbf{x} - \mathbf{z} \|^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} - \mathbf{z} \rangle = \ldots$ (quadratische Funktion in μ, die man auf üblichem Wege minimiert).

1.16 $\mathbf{0} = 0 \cdot (3, 1, 1) + 1 \cdot (0, 0, 0)$

1.17 $a = 4$

1.18 Parameterwerte $\lambda = -\frac{1}{6}$ (Gerade), $\mu = -\frac{5}{6}, \nu = \frac{1}{3}$ (Ebene)

1.19 Die Bedingung, dass ein beliebiges $\mathbf{p} \in g$ (entspr. beliebig vorgegebenem Parameterwert λ) auch zu E gehört (Parameterwerte μ, ν), führt nach geringer Umformung auf

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \nu = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Drücken Sie aus den beiden ersten Gleichungen der Vektorbeziehung μ und ν durch λ aus und zeigen Sie, dass diese Ausdrücke in λ auch in der dritten Gleichung Übereinstimmung der beiden Seiten ergeben.

1.21 $a = -4$

1.23 Es sei z.B. $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{e}_1, \mathbf{r} = \mathbf{e}_2$. Dann ist $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} = \mathbf{0}$ und folglich $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \wedge \mathbf{r} = \mathbf{0}$. Zur rechten Seite: $\mathbf{q} \wedge \mathbf{r} \parallel \mathbf{e}_3$ und $\neq \mathbf{0}$ (weshalb?), daher $\mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \parallel \mathbf{e}_2$ und $\neq \mathbf{0}$.

1.26 $(a_0, a_1, a_2) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

1.27
- i) ja, Abbildung $x \to x$
- ii) nein; es gibt zu jedem x mehr als ein y mit $(x, y) \in G$, nämlich alle y mit $y \geq x^2$
- iii) nein, weil es für negatives x kein y gibt mit $x = y^2$

1.31
- i) bijektiv
- ii) surjektiv, nicht injektiv (z.B. $(0, 0) \to 0$ und $(1, -1) \to 0$)

iv) injektiv, aber nicht surjektiv. (Zeigen Sie dazu etwa, dass alle Bilder in einer Ebene mit leicht angebbarer Parameterdarstellung liegen. Finden Sie noch andere Zugänge zum Beweis?)

1.34 Es sei etwa $\pi^k = \pi^l$ mit $k > l$. Zeigen Sie: $\pi^{k-l} = \iota$.

Kapitel 2

2.4 Es sind nicht alle Gruppenaxiome erfüllt. Es ist z.B. $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$. (Was widerspricht daran wirklich den Gruppenaxiomen?)

2.5 Das Quadrat wird z.B. die Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in sich übergeführt. Geben Sie einen anderen "neuen" Drehwinkel an, für den dies zutrifft. Arbeiten Sie nun mit Permutationen und bilden Sie alle Produkte der "neuen" Permutationen mit den Elementen von $\mathcal{V}$. Erhalten Sie eine Gruppe?

2.9 $\phi(z) = x$ wenn $z = x + iy$ ($x =$ Realteil von z, $\Re(z)$)

2.15 Sei $\mathbf{w} \in W, \mathbf{w} \notin X; \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \notin W \Rightarrow \mathbf{w}, \mathbf{x} \in Y = W \cup X$.
Ang.: $\mathbf{t} = \mathbf{w} + \mathbf{x} \in Y \Rightarrow \mathbf{t} \in X$ oder $\mathbf{t} \in W \Rightarrow \mathbf{t} \in W$. ($\mathbf{t} \in X$ führt nämlich sofort auf den Widerspruch $\mathbf{w} = \mathbf{t} - \mathbf{x} \in X$.) Daher $\mathbf{x} = \mathbf{t} - \mathbf{w} \in W$, also ein gleichartiger Widerspruch. Somit führt die Addition zweier Elemente i.A. aus Y heraus.

2.17 Für $k \neq j$ lautet der Zähler von $L_j(x_k) : \Pi_{m \neq j}(x_k - x_m)$. Dabei ist wegen $k \neq j$ der Index $m = k$ im Produkt zugelassen und liefert den Faktor 0. – Für $k = j$ stimmen Zähler und Nenner Glied für Glied überein; es ergibt sich 1.

Kapitel 3

3.1 Zu ii): $N(f) = \int_I f f' dx$ ist nichtlinear. Man nehme $I = [0, 1], f(x) = x$, daher $f'(x) = 1$, also $N(f) = \frac{1}{2}$. Mit $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, 1$ ist $N(\alpha f) = \int_0^1 (\alpha x) \cdot \alpha \, dx = \frac{\alpha^2}{2} \neq \frac{\alpha}{2}$. ($\alpha^2 = \alpha$ gilt nur für $\alpha = 0, 1$).
Zu v): Hier fällt die Antwort für $c = 0$ und $c \neq 0$ unterschiedlich aus!

3.4 Arbeiten Sie zunächst mit 2×2-Matrizen, sollte der allgemeine Fall Schwierigkeiten bereiten.

3.6 Skizzieren Sie ein Schachbrett mit einer möglichen Aufstellung.

3.9 falsch (geben Sie 2 einander widersprechende Gleichungen mit 3 Unbekannten an!)

3.8 Das ursprüngliche Gleichungssystem ist nicht lösbar.

3.10 Trifft zu. Rekonstruieren Sie nämlich das ursprüngliche System aus dem veränderten!

3.14 Zeigen Sie, dass im Falle $l_{ii} \neq 0 \ \ \forall\, i$ das System $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für jede rechte Seite genau eine Lösung besitzt!

3.20 $A^2 = O$ z.B. für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Zu A^tA: sehen Sie sich die Diagonalelemente von A^tA an! (Weshalb geht hier die Grundvoraussetzung $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ein? Was kann z.B. über $K = \mathbb{Z}_2$ bei 2×2-Matrizen eintreten? Betrachten Sie hier die Matrix, deren sämtliche Eintragung $\overline{1}$ sind!).

Kapitel 4

4.1 Matrix 1: nein; Matrix 2: ja.

4.2

$$\begin{pmatrix} -5+6c+2s & -2+2c-s & -3+3c+s \\ 4s & c+s & 2s \\ -2(-5+5c+3s) & 4-4c+s & 6-5c-3s \end{pmatrix}$$

Kapitel 6

6.1 ja; die gemeinsame Nullstelle ist eine relativ kleine natürliche Zahl.

6.2 nein

6.3 -2 ist 5-fache Nullstelle: $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + \ldots$

6.4 $q(y) = a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_n$

6.8 Ein Eigenwert ist 1, einer $-\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$, der dritte ist … Aus welchen Gründen ist für ein gewisses $n : P^n = I$? (Es handelt sich um eine Permutationsmatrix!) Was folgt daraus für die Eigenwerte?

6.9 Eigenwerte $-1, 1, 1$

6.10 Eigenwerte $4, 4, 2$; zu 4 gibt es nur einen l.u. Eigenvektor (z.B. $(-3, -3, 4)^t$)

6.11 Eigenwerte $1, 1+i, 1-i$

Kapitel 7

7.1 Es gilt

$$\mathbf{x}-\mathbf{y}\perp\mathbf{x}+\mathbf{y}\Leftrightarrow\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle=0\Leftrightarrow\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle=0\Leftrightarrow\parallel\mathbf{x}\parallel^2=\parallel\mathbf{y}\parallel^2$$

7.2 Unter Einschluss der Cosinusfunktionen handelt es sich um kein Orthogonalsystem mehr, da z.B. $\int\limits_0^\pi \sin 2x\cdot\cos\ x\ dx=\frac{4}{3}$.

7.5 $\int\limits_0^1\sqrt{1+x^2}\cdot 1dx\leq(\int\limits_0^1(1+x^2)\ dx)^{\frac{1}{2}}(\int_0^1 1^2dx)^{\frac{1}{2}}\sim 1.1547$. (Exakter Wert des Integrals: $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\mathrm{ArSinh}(1))\sim 1.14779$)

7.6 Vorfaktor $\frac{1}{2\pi}$

7.10 $(1,3,1)^t,(13,-5,3)^t,(-1,-1,2)^t$

7.12 Den ersten Vektor kann man z.B. vermöge $\mathbf{f}_1=\mathbf{n}\wedge\mathbf{e}_1$ gewinnen (weshalb?), den zweiten aus $\mathbf{f}_2=\mathbf{n}\wedge\mathbf{f}_1$.

7.13 i) nein (liefert 0 für $(x_1,x_2)^t=(y_1,y_2)^t=(0,1)^t$).

ii) nein (für $(x_1,x_2)^t=(y_1,y_2)^t=(0,1)^t$ und $\alpha=2$ haben wir $\langle\alpha\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=4\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ statt $\langle\alpha\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$, wie es sein müsste; n.b. $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\neq 0$, also wirklich ein Widerspruch!)

iii) nein (Begründung ähnlich wie bei i)

7.21 $\mathbf{n}=(3.1,-1)^t$ ist Normalvektor auf die Ebene. Bestimmen Sie ähnlich wie in Beispiel 7.12 zwei (diesmal normierte) zu $\mathbf{n}$ und zueinander orthogonale Vektoren $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2$.

7.22

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&\sqrt{6}/5\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Kapitel 8

8.2 Stärkste Krümmung in Richtung $(1,1)^t$ bzw. $(1,-1)^t$. Flach in Richtung $(1,0)^t$ bzw. $(0,1)^t$. (Es kommt auf $\langle Q\mathbf{s},\mathbf{s}\rangle=0$ an und hierbei wieder nur auf $\frac{s_1}{s_2}$ oder $\frac{s_2}{s_1}$!)

8.3 Ist für ein $\alpha \neq 0$ sowohl α als auch zu $-\alpha$ Eigenwert von A, so ist α^2 Eigenwert von A^2, und zwar sind sowohl die A-Eigenvektoren zu α wie auch zu $-\alpha$ A^2-Eigenvektor zu α^2; in unserer üblichen Symbolik folgt $E_\alpha^{A^2} = [E_\alpha^A, E_{-\alpha}^A]$. (Geben Sie noch das Argument, dass nicht nur $\subseteq$, sondern sogar $=$ gilt!)

8.4 A wird durch

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert.

8.6 $(Q^* A\, Q)^* = Q^* A^*\, Q = Q^* A\, Q$.
Es lassen sich konkrete Beispiele im Bereich der 2×2-Matrizen finden, wo bei selbstadjungierten A sehr wohl $T^{-1}AT$ nicht selbstadjungiert ist. Geben Sie solche an!

8.7 $\Leftarrow$ klar.

$\Rightarrow$ sei also $\langle A\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k\rangle = \langle \mathbf{f}_j, A\mathbf{f}_k\rangle \quad \forall\, j,k$. Sei $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \mathbf{x} = \sum x_j \mathbf{f}_j$ und $\mathbf{y} = \sum y_k \mathbf{f}_k$. Dann gilt $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum\limits_{j,k} \langle A\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k\rangle x_j y_k = \ldots$

8.13 Transformation mit einer Permutationsmatrix $1 \Leftrightarrow j$ führt a_{jj} nach a_{11} über. Dann Satz anwenden.

8.17 Es muss für die Permutation $\pi_{ij} = \pi_{ji} \quad \forall\,(i,j)$ gelten. Für jedes geordnete Paar (i,j) mit $p_{ij} = 1$ ($i < j$; P die zu π gehörige Matrix) betrachte man die Transposition $\tau : i \leftrightarrow j$. Es ist dann $\pi = \prod \tau$ (Produkt über alle derartigen Transpositionen). Für zwei Permutationen τ, σ $\tau \neq \sigma$ im Produkt gilt also: ist $\tau(i) \neq i$ für ein i, so ist $\sigma(i) = i$ (u.u.).

8.22 i) ja

ii) nein (Inverses!)

iii) nein; wie muss man die Definition modifizieren, dass $\mathfrak{K}$ doch Gruppe wird?

iv),v) nein

Kapitel 9

9.3 R ist dann eine rationale Funktion in den ursprünglichen Matrixelementen abseits von Nullstellen des Nenners.

$$RR^{-1} = I \Rightarrow O = \dot{I} = (RR^{-1})^{\dot{}} = \dot{R}(R^{-1}) + R(R^{-1})^{\dot{}} \Rightarrow (R^{-1})^{\dot{}} = \dots$$

9.4 $c_1 e^t + c_2 e^{2it} + c_3 e^{-2it}$

9.6 Allgemeine Lösung

$$u(t) = \frac{7}{5}\, e^{-2t} + c_1 e^{3t} + c_2 e^{-4t}$$

9.8 Eigenwert 2 (dreifach). 2 l. u. Eigenvektor: $(3,0,1)^t, (2,-1,0)^t$. Daher eine Ketter der Länge 2 (ein Hauptvektor 2. Stufe). Für die Normalform kann man hier abbrechen und erhält

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.9 $S = (5,0,0), \quad P = (1).$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -0.6 & -0.8 \\ 0.6 & 0.64 & -0.48 \\ 0.8 & -0.48 & 0.36 \end{pmatrix}$$

9.10

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

9.12 Erweitern Sie eine Orthonormalbasis von U zu einer für den gesamten Raum und arbeiten Sie gleich mit der Matrixdarstellung P_U in dieser Basis. Verwenden sie dann Gl. 9.22.

9.14 Es ist dann $\det A^*A = 0$ und somit besitzt A^*A einen Eigenwert 0. Was folgt daraus für die Singulärwertdarstellung S und sodann für S_+?

9.17 Alle Eintragungen von $\mathbf{x} : \frac{1}{4}$

Kapitel 10

10.2 $T = (1+\mu)I - \mu\ S_+ \Rightarrow \widetilde{T} =$ diag $((1+\mu) - \mu\omega_k)$. Der Mittelpunkt $1+\mu$ (wobei$\mu > 0$!) des relevanten Kreises und daher erhebliche Teile des Kreisrandes liegen ausserhalb des Einheitskreises. Das Verfahren ist also stets unbrauchbar.

10.4 $T = I + \mu(S_+ - 2I + S_-)$ mit $\mu = \tau/h^2$. Folglich $\tau_k = 1 - 2\mu\,(1 - \cos\frac{2\pi k}{n})$. Klammerausdruck variiert i. W. zwischen 0 und 2, daher Bedingung $2\mu \leq 1$, d. h. $\tau \leq \frac{h^2}{2}$. Mit abnehmender räumlicher Schrittweite h wegen des Quadrates in h^2 prohibitiv kleine zeitliche Schrittweite.

Kapitel 11

11.1 Es werde z.B. $\frac{\|\mathbf{x}\|_a}{\|\mathbf{x}\|_b}$ beliebig groß. Dann $\exists$ zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\mathbf{x}_n$ mit $\frac{\|\mathbf{x}_n\|_a}{\|\mathbf{x}_n\|_b} \geq n$, d. h. $\| \mathbf{x}_n \|_a \geq n \| \mathbf{x}_n \|_b$. Da sich der Quotient der Normen bei Skalierung des Vektors nicht ändert, fordern wir gleich $\| \mathbf{x}_n \|_b = \frac{1}{n}$, womit $\|\mathbf{x}_n\|_b \overset{\|\,\|_b}{\to} 0$ und somit $\mathbf{x}_n \overset{\|\,\|_b}{\to} \mathbf{0}$; aber $\| \mathbf{x}_n \|_a \geq 1$ und daher keine Konvergenz $\mathbf{x}_n \overset{\|\,\|_a}{\to} \mathbf{0}$.

11.3 Mit $\eta := \epsilon^2$ verwende man $\| \mathbf{x} \|_\epsilon = (\eta x_1^2 + \frac{1}{\eta} x_2^2 + x_3^2 + \ldots)^{1/2}$.